ATS

Jeudi 11 mai 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

1. (a) Pour tout $u = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ et $v = (x', y', z', t') \in \mathbb{R}^3$ et pour tout réel λ, on a

$$\begin{aligned}
p(\lambda u + v) &= p(\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z', \lambda t + t') \\
&= \left(\frac{\lambda x + x'}{2} + \frac{\lambda z + z'}{2}, \lambda y + y', \frac{\lambda x + x'}{2} + \frac{\lambda z + z'}{2}, \lambda t + t'\right) \\
&= \left(\lambda \frac{x + z}{2} + \frac{x' + z'}{2}, \lambda y + y', \lambda \frac{x + z}{2} + \frac{x' + z'}{2}, \lambda t + t'\right) \\
&= \lambda \left(\frac{x + z}{2}, y, \frac{x + z}{2}, t\right) + \left(\frac{x' + z'}{2}, y', \frac{x' + z'}{2}, t'\right) = \lambda p(x, y, z, t) + p(x', y', z', t')
\end{aligned}$$

p est bien linéaire.

(b) Dans la base canonique, on a

$$p(1,0,0,0) = (1/2, 0, 1/2, 0), \quad p(0,1,0,0) = (0,1,0,0),$$

$$p(0,0,1,0) = (1/2, 0, 1/2, 0) \quad \text{et} \quad p(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$$

et donc, dans la base canonique, la matrice de p est

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(c) La matrice P est réelle et symétrique. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

2. (a) Après calcul, $\mathrm{S}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I}_4$.

(b) S est réelle symétrique. D'après le théorème spectral, elle est diagonalisable.

(c) Soit $\mathrm{P_S}$ le polynôme caractéristique de S : $\mathrm{P_S}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{S} - \mathrm{XI}_4) = \begin{vmatrix} -\mathrm{X} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1-\mathrm{X} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\mathrm{X} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\mathrm{X} \end{vmatrix}$. Par développement ou pivot, on en déduit :

$$\mathrm{P_S}(\mathrm{X}) = (1-\mathrm{X})(1-\mathrm{X})(\mathrm{X}^2 - 1) = (\mathrm{X}-1)^3(\mathrm{X}+1)$$

S admet donc deux valeurs propres, $\lambda_1 = -1$ et $\lambda_2 = 1$.

(d) D'après ce qui précède, -1 est de multiplicité 1 et 1 est de multiplicité 3.

(e) $(x,y,z,t) \in E_{-1}$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccc} z & = & -x \\ y & = & -y \\ x & = & -z \\ t & = & -t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & -z \\ y & = & 0 \\ z & = & z \\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, $E_{-1} = \mathrm{Vect}(-1,0,1,0) = \mathrm{Vect}(u_1)$ avec $u_1 = (-1,0,1,0)$.

(f) De même, $(x,y,z,t) \in E_1$ si et seulement si

$$\left\{\begin{array}{ccc} z & = & x \\ y & = & y \\ x & = & z \\ t & = & t \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccc} x & = & z \\ y & = & y \\ z & = & z \\ t & = & t \end{array}\right.$$

Ainsi, $E_1 = \mathrm{Vect}((1,0,1,0),(0,1,0,0),(0,0,0,1))$. On peut montrer rapidement que cette famille est libre (en regardant la position des 0). On note $u_2 = (1,0,1,0)$, $u_3 = (0,1,0,0)$ et $u_4 = (0,0,0,1)$.

(g) Puisque S est diagonalisable, (u_1,u_2,u_3,u_4) forme une base de $\mathbb{R}^4$. Dans cette base, la matrice de S est $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note alors U la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1,u_2,u_3,u_4).

(h) Puisque $S^2 = I_4$, on a $S^{2016} = (S^2)^1 008 = I_4$ et donc $S^{2017} = S^{2016}S = S$.

3. (a) Par définition, F et G sont des espaces engendrés, donc sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.

(b) Soient $v \in F$ et $w \in G$. On peut écrire $v = a_1 u_1$, et $w = a_2 u_2 + a_3 u_3 + a_4 u_4$ où (a_1,a_2,a_3,a_4) sont des réels. Alors, par linéarité du produit scalaire :

$$(v,w) = a_1 a_2 (u_1,u_2) + a_1 a_3 (u_1,u_3) + a_1 a_4 (u_1,u_4)$$

or, par calcul :

$$(u_1,u_2) = (u_1,u_3) = (u_1,u_4) = 0$$

donc $(v,w) = 0$: v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.

(c) Plusieurs réponses possibles. Par définition, F et G sont les espaces propres de s, qui est diagonalisable, donc $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.
On peut sinon le montrer à la main. Soit $v \in F \cap G$. Alors $v \in F$ et $v \in G$. D'après la question précédente, $(v,v) = 0$, et donc $v = 0$. Ainsi, la somme est directe. De plus, $\dim(F) = 1$ et $\dim(G) = 3$, donc $\dim(F) + \dim(G) = 4 = \dim(\mathbb{R}^4)$. Par un résultat du cours, $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

4. (a) Rapidement, pour tout $(x,y,z,t) \in R^4$, $p^2(x,y,z,t) = p(x,y,z,t)$.

(b) On a $p(u_1) = (0,0,0,0)$, $p(u_2) = u_2$, $p(u_3) = u_3$ et $p(u_4) = u_4$.

(c) D'après ce qui précède, 0 et 1 sont valeurs propres. 0 est valeur propre de vecteur propre associé u_1, et 1 est valeur propre de vecteurs propres associées e_2, e_3 et e_4. D'après la question $2g$, la famille (u_1,u_2,u_3,u_4) est une base de $\mathbb{R}^4$, donc une base de vecteurs propres de p.

(d) Dans la base (u_1,u_2,u_3,u_4), la matrice de p est

$$\Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

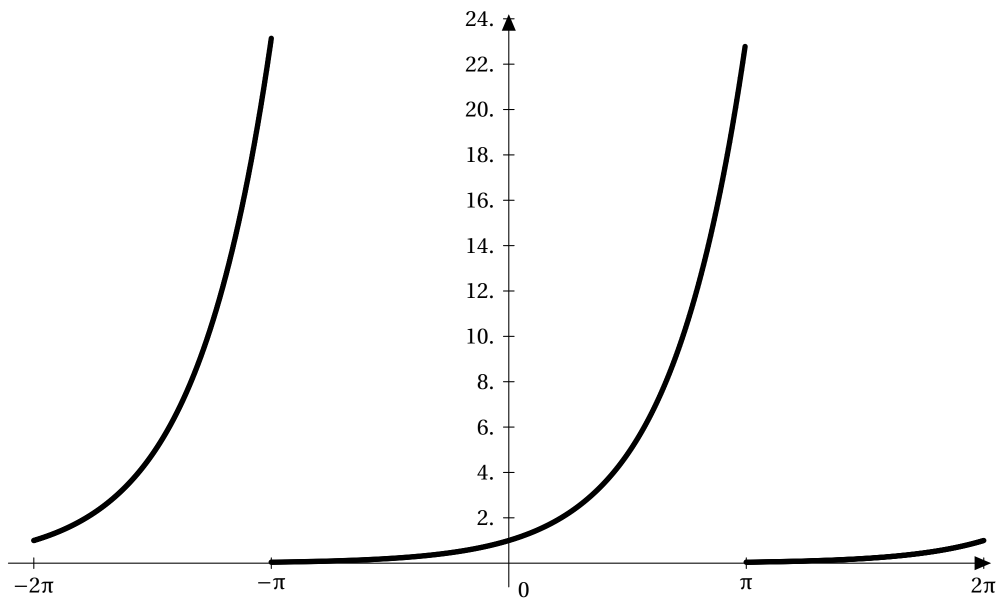
et on a $\mathrm{P} = \mathrm{V}\Delta\mathrm{V}^{-1}$, avec V la matrice de passage de la base canonique à la base (u_1, u_2, u_3, u_4), c'est-à-dire

$$\mathrm{V} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(e) On a montré, en question $4a$, que $p^2 = p$; ainsi, p est un projecteur. D'après les résultats précédents, on en déduit que p est le projecteur sur $\mathrm{G} = \mathrm{Vect}(u_2, u_3, u_4)$ parallèlement à $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1)$. Enfin, puisque $\mathrm{F} \perp \mathrm{G}$ (question $3b$), on en déduit que p est la projection orthogonale sur G.

Exercice 2

1. On obtient le graphique suivant :



2. (a) Par définition :

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{c}\mathrm{e}^{ct}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\pi c} - \mathrm{e}^{-\pi c}}{c} = \frac{\mathrm{sh}(\pi c)}{\pi c} \end{aligned}$$

(b) Remarquons que, pour $n \geqslant 1$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ct}\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\Re\left(\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{ct}\mathrm{e}^{int}\mathrm{d}t\right)$$

Calculons alors cette dernière intégrale :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ct}e^{int}dt &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(c+in)t}dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{c+in}e^{(c+in)t}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{1}{(c+in)\pi}\left(e^{c\pi+in\pi}-e^{-c\pi-in\pi}\right) \\
&= \frac{(-1)^n}{(c+in)\pi}\left(e^{c\pi}-e^{-c\pi}\right) \quad \text{car } e^{in\pi}=(-1)^n \\
&= \frac{2(-1)^n \mathrm{sh}(\pi c)}{(c^2+n^2)\pi}(c-in)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout n :

$$a_n = \frac{2(-1)^n c\,\mathrm{sh}(\pi c)}{\pi(c^2+n^2)}$$

(c) De même, pour $n \geqslant 1$, on a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ct}\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\Im\left(\int_{-\pi}^{\pi} e^{ct}e^{int}dt\right)$$

et d'après le calcul précédent

$$b_n = -\frac{2(-1)^n n\,\mathrm{sh}(\pi c)}{\pi(c^2+n^2)}$$

3. (a) $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0. Remarquons que sur $]-\pi;\pi[$, $g(-t)=g(t)$. De plus, par périodicité, $g(-\pi)=g(\pi)$: ainsi, g est paire sur $[-\pi;\pi]$ et par périodicité, g est paire sur $\mathbb{R}$.

(b) Par construction, g est continue sur $[-\pi;\pi[$. Par périodicité, $g(\pi)=g(-\pi)=\mathrm{ch}(-c\pi)=\mathrm{ch}(c\pi)$ (par parité de ch). Or, $\lim_{t\to\pi^-} g(t)=\mathrm{ch}(c\pi)=g(\pi)$. Ainsi, g est continue en π, et donc sur $[-\pi;\pi]$. Enfin, par 2π-périodicité, on en déduit que g est continue sur $\mathbb{R}$.

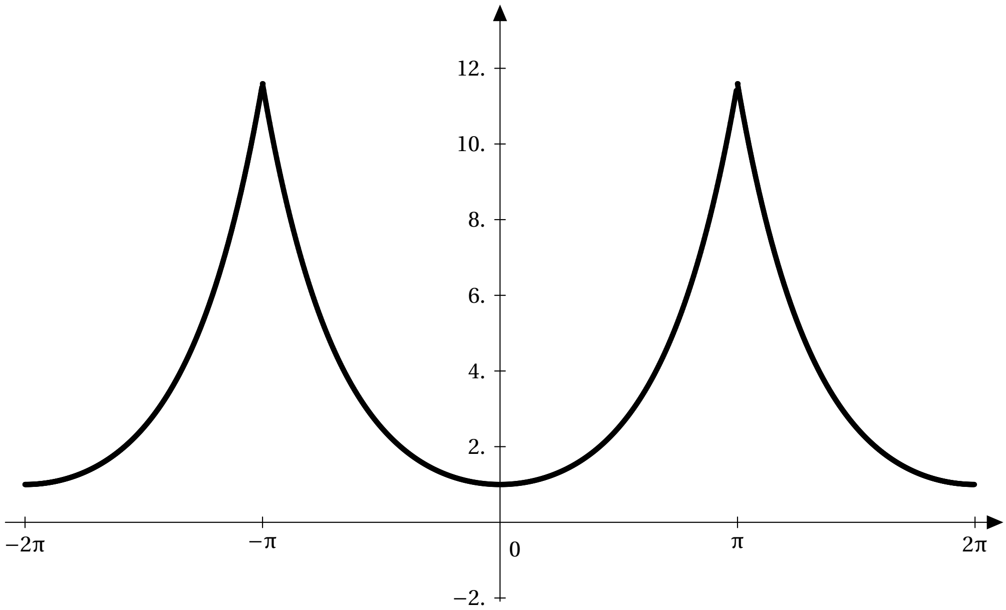
(c) La fonction g est 2π-périodique, et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. D'après le théorème de Dirichlet, la série de Fourier converge vers la régularisée de g. Or, g est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la série de Fourier converge vers g.

(d) Remarquons que $\mathrm{S}f(-t) = a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nt) - \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nt)$. Ainsi, pour tout réel t,

$$\mathrm{S}_g(t) = \frac{\mathrm{S}f(t)+\mathrm{S}f(-t)}{2} = a_0 + \sum_{n+1}^{+\infty} a_n\cos(nt)$$

Ainsi, on a $a'_0 = a_0$, et pour tout $n \geqslant 1$, $a'_n = a_n$ et $b'_n = 0$.

4. (a) On obtient le résultat suivant :



(b) Puisque Sg converge vers g, on a S$g(0) = g(0) = 1$. Ainsi,

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1$$

soit

$$\frac{\operatorname{sh}(\pi c)}{\pi c} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2(-1)^n c \operatorname{sh}(\pi c)}{\pi(c^2+n^2)} = 1$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{c^2+n^2} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\pi c}{\operatorname{sh}(\pi c)} - 1\right)$$

‘

(c) De même, par convergence de Sg vers g, on a S$g(\pi) = g(\pi) = \operatorname{ch}(c\pi)$. Puisque $\cos(n\pi) = (-1)^n$, par le même raisonnement, on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c^2+n^2} = \frac{1}{2c^2}\left(\frac{\pi c \operatorname{ch}(c\pi)}{\operatorname{sh}(\pi c)} - 1\right)$$

5. La fonction g étant continue (donc continue par morceaux), on peut appliquer l'identité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$$

Après calcul (long et fastidieux), on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g^2(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}(2\pi c)}{2\pi c} + 1\right)$$

et on a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{c^2+n^2}\right)^2 = \frac{\pi^2}{2c^2\operatorname{sh}^2(\pi c)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\operatorname{sh}(2\pi c)}{2\pi c} + 1\right) - \frac{\operatorname{sh}^2(\pi c)}{\pi^2 c^2}\right]$$

Exercice 3

Partie A

1. On a rapidement $g(x, y) = g(x, -y)$, donc S admet une symétrie par rapport au plan $(\mathrm{O}; \overrightarrow{i}; \overrightarrow{k})$; $g(x, y) = g(-x, y)$, donc S admet une symétrie par rapport au plan $(\mathrm{O}; \overrightarrow{j}; \overrightarrow{k})$; et $g(x, y) = g(-x, -y)$, donc S admet une symétrie par rotation d'angle π et d'axe $(\mathrm{O}; \overrightarrow{k})$.
2. g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale). On a alors, par composée
$$p(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = 2(2x)(x^2 + y^2 - 3) = 4x(x^2 + y^2 - 3)$$
3. De même, par composée :
$$q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = 2(2y)(x^2 + y^2 - 3) + 8y = 4y(x^2 + y^2 - 1)$$
4. On fera attention lorsqu'on résout un système produit comme cela. On doit bien considérer les 4 possibilités.
(x, y) est solution du système si et seulement si $x = 0, y = 0$; ou $x^2 + y^2 - 3 = 0$ et $y = 0$, ou $x = 0$ et $x^2 + y^2 - 1 = 0$; ou enfin $x^2 + y^2 - 3 = 0$ et $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Ainsi, (x, y) est solution du système si et seulement si
$$x = 0, y = 0 \quad \text{ou} \quad x^2 = 3, y = 0 \quad \text{ou} \quad x = 0, y^2 = 1,$$
la possibilité $x^2 + y^2 - 3 = 0$ et $x^2 + y^2 - 1 = 0$ étant impossible. On obtient alors 5 solutions au système
$$(0, 0), \quad (-\sqrt{3}, 0), \quad (\sqrt{3}, 0), \quad (0, -1), \quad \text{et} \quad (0, 1)$$
5. (x, y) est un point critique de g si et seulement si $p(x, y) = q(x, y) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si (x, y) est solution du système vu en 4.
La fonction g admet ainsi 5 points critiques :
$$(0, 0), \quad (-\sqrt{3}, 0), \quad (\sqrt{3}, 0), \quad (0, -1), \quad \text{et} \quad (0, 1)$$
6. La fonction g est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (car polynomiale). D'après le théorème de Schwarz, on a
$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$$
7. Puisque g est $\mathscr{C}^2$, elle admet des dérivées partielles secondes.
   (a) En dérivant p par rapport à x :
$$r(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 3) + 4x(2x) = 4(3x^2 + y^2 - 3)$$
   (b) En utilisant le résultat de la question 6 :
$$s(x, y) = 8xy$$
   (c) En dérivant q par rapport à y :
$$t(x, y) = 4(x^2 + y^2 - 1) + 4y(2y) = 4(x^2 + 3y^2 - 1)$$
8. On utilise le résultat classique : si $rt - s^2 > 0$, le point est un extremum, un minimum local si $r > 0$, et un maximum local si $r < 0$; si $rt - s^2 < 0$, le point est un point col. Enfin, si $rt - s^2 = 0$, on ne peut pas conclure.
En traitant les 5 points critiques, on en déduit que :
   - $(0, 0)$ est un maximum local ;
   - $(0, 1)$ et $(1, 0)$ sont des points cols (ou points selles) ;
   - $(\sqrt{3}; 0)$ et $(-\sqrt{3}; 0)$ sont des minima locaux.

Partie B

1. Avec $x = 0$ et $y = 1$, on a $g(0,1) = 0$ et d'autre part

$$0 = (\alpha^2 + 1 - r^2)(\alpha^2 + 1 - r^2)$$

Ainsi, $(\alpha^2 + 1 - r^2)^2 = 0$, c'est-à-dire $\alpha^2 + 1 = r^2$.

2. De même, avec $x = 1$ et $y = 0$, on a $g(1,0) - 4$, et d'autres part

$$-4 = ((1-\alpha)^2 - r^2)((1+\alpha)^2 - r^2)$$

soit $-4 = (\alpha^2 + 1 - 2\alpha - r^2)(\alpha^2 + 1 + 2\alpha - r^2)$. Avec la relation $\alpha^2 + 1 = r^1$, cela donne

$$-4 = (-2\alpha)(2\alpha) \Leftrightarrow \alpha^2 = 1$$

Puisque $\alpha \geqslant 0$ (hypothèse), on a $\alpha = 1$, et donc $r^2 = 2$, soit $r = \sqrt{2}$ (car $r \geqslant 0$).

3. En développant d'une part $g(x, y)$, et d'autre part $((x-1)^2 + y^2 - 2)((x+1)^2 + y^2 - 2)$, on en déduit bien que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = \left((x-1)^2 + y^2 - 2\right)\left((x+1)^2 + y^2 - 2\right)$$

4. La question précédente nous assure que $g(x, y) = 0$ si et seulement si $\left((x-1)^2 + y^2 - 2\right) = 0$ ou $\left((x+1)^2 + y^2 - 2\right) = 0$. Ainsi, $g(x, y) = 0$ est formé du cercle de centre $(1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$, ainsi que cercle de centre $(-1,0)$ et de rayon $\sqrt{2}$.
L'intersection de ces deux cercles donne alors $x = 0$ et $y = 1$ ou $y = -1$. Il y a ainsi deux points (de l'espace) d'intersection de ces deux cercles : $(0,1,0)$ et $(0,-1,0)$.

Exercice 4

1. La fonction f renvoie le nombre de **séquence1** du tableau. En effet, la boucle parcourt tout le tableau de la première position jusqu'à l'avant dernier indice. A chaque fois qu'un terme est supérieur au précédent (i.e. qu'on passe d'un 0 à un 1), on augmente la variable `nb`. On compte bien, dans la variable `nb` qui est renvoyée par le programme, le nombre de **séquence1** du tableau.
2. On veut une fonction renvoyant la plus longue **séquence1**. L'idée est de parcourir l'ensemble comme dans la fonction présentée en 1. A chaque fois qu'on a un passage 0 -> 1, on compte le nombre de 1 apparaissant. Si ce nombre est supérieur à la taille de la plus longue séquence en cours, on a trouvé une séquence plus longue. Cela donne un programme ainsi :

Programme Scilab 1

```
function plus_longue=g(t)
    plus_longue=[0 0 0]   // Tableau renvoyant le début, la fin et la
longeur de la
                          // séquence la plus longue
    n=length(t)           // taille de la table t
    debut=0               // indice du début de la sequence1 en cours
    longueur=0            // longueur de la sequence1 en cours
    for i=1:(n-1)
        if t(i)<t(i+1)    // Cas où on commence une sequence
            debut=i+1
        end
        if t(i)>t(i+1)  // Cas d'une fin de sequence
            longueur=i-debut+1  // On calcule la longueur
            if longueur>plus_longue(3)  // Si la longueur est plus
                                        // grande que l'actuelle
                plus_longue=[debut i longueur]
            end
```

```
        end
    end
endfunction
```