CHAPITRE 1

ENSEMBLE, APPLICATIONS ET RAISONNEMENT

Résumé

Ce chapitre introductif est très important. Il pose les bases nécessaires à l'ensemble de l'année d'ATS :

— *les principes de raisonnement (récurrence, contraposée, absurde) ;*

— *les notions liées aux ensembles ;*

— *les notations Σ et $\prod$, avec certains exemples classiques (factorielle, nombre combinatoire) ;*

— *les notions de bases sur les applications, qui feront l'objet de chapitres supplémentaires.*

Même si ce chapitre est un peu abrupt, il faut régulièrement y revenir pour maitriser l'ensemble des éléments présents.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① mener un raisonnement par récurrence .... □

② maitriser les raisonnements élémentaires :
- le raisonnement par contraposée .... □
- le raisonnement par l'absurde .... □
- la justification d'équivalence et d'implication .... □

③ maitriser les symboles Σ et $\prod$:
- le changement de variable dans une somme .... □
- la simplification d'une somme télescopique .... □

④ maitriser la factorielle et les nombres combinatoires :
- la définition de $n!$ et de $\binom{n}{p}$ .... □
- la formule du binôme de Newton .... □
- la formule du triangle de Pascal .... □
- la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$ .... □

⑤ connaître les notions importantes liées aux applications :
- les définitions d'injection, surjection, et bijection, ainsi que les méthodes .... □
- la définition d'image directe, d'image réciproque et de restriction .... □

I. Raisonnement par récurrence

1) Principe de récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement important des mathématiques. Pour le comprendre, nous allons partir d'un exemple :

Exemple 1. — On considère la proposition $\mathrm{P}(n)$ dépendant d'un entier n : " $2^n \geqslant n+1$ "

Vérifions que cette propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$:
Pour $n = 0$: $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$
Pour $n = 1$: $2^1 = 2 \geqslant 1+1 = 2$
Pour $n = 2$: $2^2 = 4 \geqslant 2+1 = 3$
Pour $n = 3$: $2^3 = 8 \geqslant 3+1 = 4$
Pour $n = 4$: $2^4 = 16 \geqslant 4+1 = 5$

On peut continuer les vérifications pour tous les entiers que l'on souhaite, mais on ne pourra jamais affirmer que la proposition est vraie **pour tout *n***. Pour démontrer cette proposition, on va faire appel au **raisonnement par récurrence**.

Axiome 1. — *Soit* $\mathrm{P}(n)$ *une proposition dépendant d'un entier, et* n_0 *un entier fixé.*

- *Si* $\mathrm{P}(n_0)$ *est vraie (**initialisation**),*
- *et si pour tout entier* $n \geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n) \Rightarrow \mathrm{P}(n+1)$ *(**hérédité**),*

alors $\mathrm{P}(n)$ *est vraie pour tout entier* $n \geqslant n_0$.

Démonstration. Ceci est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui ne se démontre pas, mais qui semble "logique".
L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes). □

Remarque 1. — Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $\mathrm{P}(n) \implies \mathrm{P}(n+1)$, on dit que la propriété P est **héréditaire**.

Solution. Démontrons maintenant la propriété $\mathrm{P}(n)$: " $2^n \geqslant n+1$ " pour $n \geqslant 0$ par récurrence :

- **initialisation** : pour $n = 0$, on a bien $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$.
- **hérédité** : supposons que la propriété $\mathrm{P}(n)$ soit vraie pour **un certain** n fixé. On a donc $2^n \geqslant n+1$: c'est **l'hypothèse de récurrence**
  On veut alors démontrer $\mathrm{P}(n+1)$, *c'est à dire* $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$

$$\begin{array}{lcrcll} 2^n \geqslant n+1 & \Leftrightarrow & 2 \times 2^n & \geqslant & 2(n+1) & \text{car 2 est un nombre positif} \\ & \Leftrightarrow & 2^{n+1} & \geqslant & 2n+2 & \\ & \Leftrightarrow & 2^{n+1} - (n+1+1) & \geqslant & 2n+2-(n+1+1) & \\ & \Leftrightarrow & 2^{n+1} - (n+2) & \geqslant & n \geqslant 0 & \text{car } n \text{ est un entier positif ou nul} \end{array}$$

  On a donc bien $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$: la proposition $\mathrm{P}(n+1)$ est donc vérifiée.

On a bien démontrer l'initialisation et l'hérédité : on a donc démontré par récurrence que la propriété

P(n) est vraie **pour tout entier n** :

$$\forall\, n,\ 2^n \geqslant n+1$$

Exercice 1. — Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1+\cdots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall\, n \geqslant 1,\ 1^2+\cdots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution.

1. Soit P_n la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par P_n : “$1+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$”.
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part 1, et d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc P_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
     Or, $1+2+\cdots+(n+1) = (1+2+\cdots n)+(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+\cdots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
     Ainsi, la proposition P_{n+1} est vraie, et la propriété P est donc héréditaire.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:
   $$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit Q_n la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par Q_n : “$1^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$”.
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1^2 = 1$, et d'autre part $\frac{1(1+1)(2\times 1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Donc Q_1 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition Q_n soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
     Comme précédemment, on a alors
     $$1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$
     soit
     $$1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\frac{2^n2+n+6n+6}{6} = (n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2^n2+7n+6$. Donc,

$$1^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ainsi, la proposition Q_{n+1} est vraie, et la propriété Q est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\forall\, n \geqslant 1,\ \ 1^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVIIe siècle), ce sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connait.

Le raisonnement par récurrence est également utile pour démontrer des résultats de divisibilité.

Exemple 2. — Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11.

Solution. Soit $P(n)$ la proposition “ $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11 ”

- **initialisation** : pour $n=0$, $10^0-(-1)^0 = 0 = 0\times 11$.
- **hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour **un certain** n. On peut donc écrire $10^n-(-1)^n = 11\times p$ où p est un nombre entier. On a alors

$$\begin{aligned}
10^n &= 11\times p+(-1)^n\\
10\times 10^n &= 10\times 11\times p+10\times(-1)^n\\
10^{n+1} &= 110+10.(-1)^n\\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} &= 110p+10.(-1)^n-(-1)^{n+1}\\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} &= 11\times 10p+(-1)^n\,[10-(-1)]\\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} &= 11\times 10p+(-1)^n\times 11\\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} &= 11\times\left[10p+(-1)^n\right]
\end{aligned}$$

Donc $10^{n+1}-(-1)^{n+1}$ est bien un multiple de 11 : $P(n+1)$ est vraie.

On a donc bien démontré $P(n)$ pour tout n.

2) Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

Axiome 2 (Principe de récurrence double)**.** — *Soit* $P(n)$ *une proposition dépendant d'un entier* n*.*

- *Si* $P(0)$ *et* $P(1)$ *sont vraies.*
- *et si, pour tout entier naturel* n, $(P(n)$ *et* $P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2)$

alors $P(n)$ *est vraie pour tout entier* n*.*

Axiome 3 (Principe de récurrence forte). — *Soit* $P(n)$ *une proposition dépendant d'un entier* n.

- *Si* $P(0)$ *est vraie.*
- *et si, pour tout entier naturel* n, $(P(0), P(1), \cdots, P(n)) \implies P(n+1)$

alors $P(n)$ *est vraie pour tout entier* n.

Remarque 2. — On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois n, $n+1$ et $n+2$.

Exemple 3. — Soit u la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_n = 1 + 2^n$.

Solution. Soit P la proposition définie pour tout entier n par $P(n)$: "$u_n = 1 + 2^n$".

- **initialisation** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et pour $n = 1$ on a $u_1 = 3 = 1 + 2^1$. Ainsi P(0) et P(1) sont vraies.
- **hérédité** : supposons que les propositions $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain entier n fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $u_n = 1 + 2^n$ et $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$. Alors, par définition de u, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\underbrace{=}_{\text{H.R.}} 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \\ &= 3 + 3.2^{n+1} - 2 - 2.2^n \\ &= 1 + 32^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2.2^{n+1} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

  Ainsi, $P(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$:

II. Autres raisonnements

1) Symboles mathématiques

Nous utiliserons très souvent plusieurs symboles mathématiques. Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques**! Ce ne sont pas des abréviations.

- **quantificateur universel** : $\forall$ signifie "pour tout" ou "quel que soit".
- **quantificateur existentiel** : $\exists$ signifie "il existe".
- $\exists!$ signifie "il existe un unique".

On utilise / , | ou simplement "," pour signifier "tel que".

Exemple 4. — $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists! y \in \mathbb{R}$, $y = x + 1$ signifie : "pour tout réel x, il existe un unique réel y tel que $y = x + 1$".

Exercice 2. — Traduire les phrases mathématiques suivantes :

- $\forall\ x \geqslant 0,\ \exists! y \geqslant 0, y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = x^2+x$

Solution.

- La première se traduit par “pour tout réel x positif, il existe un unique y positif tel que $y^2 = x$”. Ainsi, cette phrase traduit l'existence de $\sqrt{x}$ pour tout réel x positif.
- La deuxième se traduit par “il existe un réel x tel que $x^2+1 = x^2+x$”. Elle traduit donc l'existence d'une solution à l'équation $x^2+1 = x^2+x$.

Remarque 3. — Dans une proposition, on peut intervertir deux quantificateurs identiques mais **on ne doit pas** intervertir deux quantificateurs différents.

Exemple 5. — Traduire en français les propositions suivantes. Signifient-elles la même chose ?

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ \exists\ y \in \mathbb{R},\ x = y+1 \quad \text{et} \quad \exists\ y \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ x = y+1$$

Solution. La première signifie “pour tout réel x, il existe un réel y tel que $x = y+1$”. Cette proposition est vraie (il suffit de prendre $y = x-1$).
La deuxième signifie “il existe un réel y tel que pour tout réel x, $x = y+1$” qui est, quant à elle, clairement fausse (contre-exemple : il suffit de prendre $x = y$).

Proposition 1.1.

Lorsqu'on nie une proposition (on écrit sa **négation**), on échange quantificateur universel et quantificateur existentiel.

Remarque 4. — La négation de $\forall\ x \in \mathbb{R}, \cdots$ est donc $\exists\ x \in \mathbb{R}, \cdots$. Ainsi, pour réfuter une proposition universelle, il suffit d'exhiber un **contre-exemple**.

Exercice 3. — Déterminer la négation de la proposition : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$.

Solution. La négation est : $\forall\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.

2) Implication et équivalence

Nous disposons aussi de certains connecteurs logiques :

- $\Leftrightarrow$: c'est l'équivalence, le “si et seulement si”.
- $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$: les implications.

Remarque 5. — Lorsque l'on a A $\Rightarrow$ B, on dit que B est la condition nécessaire, et A la condition suffisante. En effet, il **suffit** d'avoir A pour avoir B, et il est **nécessaire** d'avoir B si on a A.
Lorsqu'on a A $\Leftrightarrow$ B, A et B sont des conditions nécessaires et suffisantes.

Définition 1. — Si A $\Rightarrow$ B (sens direct), alors sa **réciproque** est B $\Rightarrow$ A.
Si on a à la fois le sens direct et sa réciproque, on a alors l'équivalence.

3) Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde

Définition 2. — Si A est une proposition, on note non A, ou $\overline{\mathrm{A}}$ sa négation.

Exemple 6. — Si A est la proposition $\forall\ x, x > 0$, alors sa négation est $\overline{\mathrm{A}} : \exists\ x, x \leqslant 0$.

Théorème 1.2.

On a l'équivalence entre A $\Rightarrow$ B (raisonnement direct) et $\overline{\mathrm{B}} \Rightarrow \overline{\mathrm{A}}$ (raisonnement par contraposée).
Pour démontrer un résultat du type A $\Rightarrow$ B, il est souvent plus commode d'utiliser un raisonnement par contraposée : on suppose que l'on a $\overline{\mathrm{B}}$ et on démontre qu'alors on a $\overline{\mathrm{A}}$.

Exemple 7. — Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Solution. Un raisonnement direct est compliqué à faire rigoureusement. En revanche, la contraposée de $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ est $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, qui est vrai. Donc on a bien $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

Remarque 6. — On peut enfin utiliser un raisonnement par l'absurde : si on veut montrer A $\Rightarrow$ B, on suppose que l'on a A et $\overline{\mathrm{B}}$ en même temps, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

Exercice 4. — Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ par l'absurde.

Solution. Par l'absurde, on suppose que $x \neq 0$ et que $x^2 = 0$. Mais alors, si $x^2 = 0$, $x = 0$. Or $x \neq 0$: c'est absurde ! Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse, et $x^2 \neq 0$.

4) Égalité

Méthode 1.1.

Pour démontrer une égalité :

① on introduit les variables nécessaires avec les mots "soit", ou "pour tout".

② en partant d'un des deux membres, on aboutit à l'autre membre par des égalités successives.

③ on conclut.

Exemple 8. — Montrer que pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

Solution. Soient a et b deux réels. Alors, en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels a et b, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$.

5) Équation et inéquation

Lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, il est important de raisonner par équivalence. Si on raisonne par implication, il est **nécessaire** de vérifier les résultats obtenus.

Pour résoudre une équation, on peut :

- partir de l'équation qu'on modifie (par équivalence) pour aboutir au résultat ;
- regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise ;
- ou enfin, on regroupe tous les termes dans un même membre, et on étudie une fonction.

Exemple 9. — Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation $\ln(x) = x - 1$.

Solution. L'équation s'écrit également $\ln(x) - x + 1 = 0$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient ainsi le tableau de signe et variations suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	||	$\nearrow$	0	$\searrow$	

Ainsi, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution : $x = 1$.

Méthode 1.2.

Pour résoudre une inéquation :

1. on introduit les variables nécessaires avec les mots “soit”, ou “pour tout”.
2. on part de l'équation ou l'inéquation, et on résout en appliquant différentes propriétés par équivalence
3. ou alors on regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise, pour dresser un tableau de signe.
4. on conclut.

Rappel 1. — *Les propriétés suivantes n'ont pas à être justifiées.*

- *On ne modifie pas une équation en ajoutant un même nombre, en multipliant ou divisant par un même nombre non nul, en simplifiant ou en appliquant une fonction strictement monotone.*
- *Ajouter un terme à une inégalité ne change pas le sens de celle-ci, de même que multiplier l'inégalité par un même nombre positif. En revanche, multiplier par un nombre négatif une inégalité change le sens de celle-ci.*

Quand on résout une inéquation, on justifiera **toutes** les étapes non triviales, par exemple en utilisant les variations d'une fonction.

Exemple 10. — Résoudre l'inéquation $3x-3<1-2x$.

Solution. On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x-3<1-2x &\iff 5x-3<1 \\ &\iff 5x<4 \\ &\iff x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S} = \left]-\infty; \frac{4}{5}\right[$.

Remarque 7. — On peut utiliser des mots en français (“c'est-à-dire”, “si et seulement si“) pour remplacer le symbole $\iff$, mais aussi pour l'implication (“donc”, “puis”, “soit”).

III. Ensembles

1) Ensembles et éléments

Définition 3. — On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble. Pour signifier que l'élément x appartient à un ensemble E, on note $x \in \mathrm{E}$. Si x n'appartient pas à E, on écrit $x \notin \mathrm{E}$.

Exemple 11. — $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ sont des ensembles usuels. On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.
$\{x_1, \cdots, x_n\}$ est l'ensemble constitué uniquement de $x_1, \cdots x_n$.

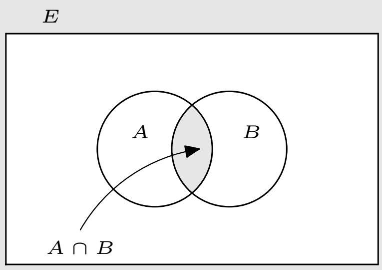
Définition 4. — L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.

Remarque 8. — ⚠On note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$.

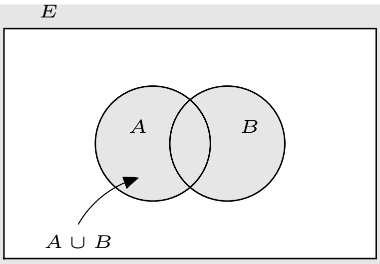
2) Union, intersection

Définition 5. — Soient A et B deux ensembles.

- On appelle **intersection** de A et de B, noté $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans A et dans B.



- On appelle **réunion** (ou **union**) de A et de B, noté $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans A ou dans B (voire dans les deux).



Exemple 12. — Si $\mathrm{A} = \{1;2;4\}$ et $\mathrm{B} = \{2;4;5\}$ alors

$$\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \{1;2;4;5\} \quad \text{et} \quad \mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \{2;4\}$$

3) Inclusion, sous-ensemble

Définition 6. — Soit E un ensemble. On dit que F est **inclus** dans E, et on note $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, si tous les éléments de F sont aussi des éléments de E. On dit alors que F est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de E.

Exemple 13. — $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0,1\} \subset \{0,1,2\}$.

Définition 7. — Soit E un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de E, et on note $\mathscr{P}(\mathrm{E})$, l'ensemble formé des sous-ensembles de E.

Exemple 14. — On a $\mathscr{P}(\{a, b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

Exercice 5. — Déterminer $\mathscr{P}(\{a, b, c\})$.

Solution. Si $\mathrm{E} = \{a, b, c\}$, alors

$$\mathscr{P}(\mathrm{E}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

Théorème 1.3.

Soit E un ensemble possédant n éléments (avec $n \geqslant 1$). Alors $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ possède 2^n éléments.

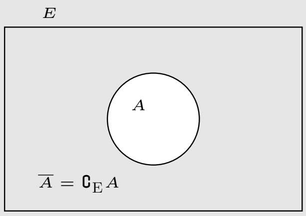
Démonstration. Pour construire un sous-ensemble de E, il faut prendre certains éléments de E et pas d'autres. Si on note $x_1; \cdots; x_n$ les éléments de E, alors pour chaque élément x_k, on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre ; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a n éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc

$$\underbrace{2 \times \cdots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

□

4) Complémentaire

Définition 8. — Soit E un ensemble et A un sous-ensemble de E. On appelle **complémentaire** de A, et on note $\overline{\mathrm{A}}$ ou $\complement_{\mathrm{E}}(\mathrm{A})$, l'ensemble des éléments de E qui ne sont pas dans A : $\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E} \setminus \mathrm{A}$.



Ainsi $\overline{\mathrm{A}}$ est l'ensemble qui vérifie $\mathrm{A} \cap \overline{\mathrm{A}} = \emptyset$ et $\mathrm{A} \cup \overline{\mathrm{A}} = \mathrm{E}$.

Exemple 15. — Si $\mathrm{E} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $\mathrm{A} = \{1, 2, 4\}$ alors $\overline{\mathrm{A}} = \{3, 5\}$.

Théorème 1.4. Lois de de Morgan

Soit E un ensemble, et soient A, B deux sous-ensembles de E.

- $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$
- $\overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$

Remarque 9. — Ainsi, la négation d'un "et" est un "ou", et réciproquement la négation d'un "ou" est un "et".

Méthode 1.3.

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on utilise la **double inclusion** : si $\mathrm{C} \subset \mathrm{D}$ et $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}$ alors nécessairement $\mathrm{C} = \mathrm{D}$.

Démonstration.

- Soit $x \in \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Donc il n'est ni dans A, ni dans B : il est donc dans $\overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$.
- Soit $\in \overline{\mathrm{A}} \cap \overline{\mathrm{B}}$. Il n'est donc pas dans A, et il n'est pas dans B : il n'est donc pas dans $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$. Ainsi, $x \in \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}}$.

L'autre égalité se montre de la même manière. □

5) Produit cartésien

Définition 9. — Soient E et F deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de E et F, noté $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, l'ensemble formé des couples (a, b) avec $a \in \mathrm{E}$ et $b \in \mathrm{F}$.

Exemple 16. — Si $\mathrm{E} = \{a, b\}$ et $\mathrm{F} = \{-1, 1\}$ alors $\mathrm{E} \times \mathrm{F} = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$

Remarque 10. —

- Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on note en général $\mathrm{E} \times \mathrm{E} = \mathrm{E}^2$.
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_k$

Exemple 17. — Les deux exemples classiques sont $\mathbb{R}^2 = \{(x,y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \cdots, x_n),\ \ x_1 \in \mathbb{R}, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple, $(1, -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ et $(0,0,1) \in \mathbb{R}^3$.

Définition 10. — Un élément $(x_1, \cdots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ est appelé un ***p*-uplet** ou une *p*-**liste**.

IV. Sommes et produits

1) Définitions et propriétés

a) Définition

Définition 11. — Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p, n]\!] = \{p; p+1; \cdots; n\}$.

Exemple 18. — Par exemple, $[\![2, 5]\!] = \{2,3,4,5\}$.

Remarque 11. — Il y a n entiers dans $[\![1, n]\!]$, et $n+1$ entiers dans $[\![0, n]\!]$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $[\![p, n]\!]$.

Exemple 19. — Il y a 7 entiers dans $[\![2, 8]\!]$.

Définition 12. —

- Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels. On note

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_n$$

et on lit “somme de $k=0$ à n des a_k”.

- Soient $a_p, \cdots, a_n$ des réels ($p \leqslant n$). On note

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$

et on lit “somme de $k=p$ à n des a_k”.

Exemple 20. — Par exemple, $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$. La notation $\ln(2) + \ln(3) + \cdots + \ln(n)$ est appelée **notation en extension**.

Exercice 6. — Ecrire la notation en extension de $\sum_{k=2}^{30} k$ et $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n}$.

Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ l'expression $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ et $2+4+6+\cdots+18$.

Solution. On a, rapidement, $\sum_{k=2}^{30} k = 2+3+\cdots+30$, $\sum_{n=1}^{p} \sqrt{n} = 1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{p}$,

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

et

$$2+4+\cdots+18 = \sum_{k=1}^{9} 2k$$

Remarque 12. — L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k^2$ représente la même somme que $\sum_{k=n}^{1} k^2$.

Remarque 13. — On définit de la même manière $a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n = \prod_{k=p}^{n} a_k$.

Définition 13. — Soit n un entier non nul. On appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.
Par convention, $0! = 1$.

Remarque 14. — On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1\times 2 = 2$ et $3! = 1\times 2\times 3 = 6$.

Proposition 1.5.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$(n+1)! = (n+1)\times n!$$

Démonstration. En effet, par définition,

$$(n+1)! = \underbrace{1\times 2\times\cdots\times n}_{=n!}\times(n+1) = n!\times(n+1)$$

□

Exercice 7. — Pour $n \geqslant 1$, simplifier $\frac{(n+2)!}{n!}$.

Solution. On a
$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

b) Première propriétés

Soient deux entiers p et n tels que $p \leqslant n$, soient $a_p, \cdots, a_n, b_p, \cdots, b_n$ des réels.

- Linéarité : $\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$ et $\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \sum_{k=p}^{n} \lambda.a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$.
- Relation de Chasles : pour tout entier $m > n$, $\sum_{k=p}^{m} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k$.
- $\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$
- $\forall\ \lambda,\ \prod_{k=p}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$

c) ln et exp

Propriété 1. —

- *Pour tous réels $a_p, \cdots, a_n$, on a* $\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} \mathrm{e}^{a_k}$.
- *Pour tous réels $a_p > 0, \cdots, a_n > 0$, on a* $\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$.

d) Sommes usuelles

Proposition 1.6. (♡) Sommes usuelles

On dispose des résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} (\text{si } q \neq 1)$$

Démonstration. Elles ont été vues précédemment. □

2) Changement de variables

a) Variables muettes

Remarque 15. — Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{z=p}^{n} a_z$$

b) Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à réécrire la somme différemment.

Proposition 1.7.

Soient $p \leqslant n$ deux entiers, l un entier, et $a_{p+l}, \cdots a_{n+l}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable $j = k - l$: ainsi, si $k = p + l$, alors $j = p$. De même, $k = n + l$ amène $j = n$.

Méthode 1.4.

Pour faire un changement de variable $j = f(k)$, on procède en remplaçant toutes les occurrences de k par son expression en fonction de j, mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence !

Exemple 21. — Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} (n-k)$ en posant $j = n - k$.

Solution. Posons $j = n - k$. Alors

$$S = \sum_{j=n}^{0} j = \sum_{j=0}^{n} j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

c) Sommes doubles

Remarque 16. — On peut envisager de calculer des sommes de sommes. Dans ce cas, on fera attention à utiliser deux variables différentes.

Exemple 22. — La somme suivante est une somme double :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} ij$$

Remarque 17. — On peut calculer la somme précédente. En effet, lorsqu'on somme sur j, la variable i est une variable indépendante. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dans certains cas, on ne peut pas séparer les variables, quand une somme dépend d'une des variables. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

Dans ce cas, on peut calculer la somme, mais en étant rigoureux :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j = \sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 + i = \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right)$$

3) Sommes télescopiques

a) Définition

Définition 14. — Soient $a_0, \cdots, a_{n+1}$ des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$$

Exemple 23. — La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ est une somme télescopique.

b) Simplification

Proposition 1.8.

Soit $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$. Alors

$$\mathrm{S}_n = a_{n+1} - a_0$$

Démonstration. En effet,

$$\mathrm{S}_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{n+1}$$

□

Exemple 24. — La somme $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ se simplifie en

$$\mathrm{S}_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

Exercice 8. — Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Simplifier S_n.

Solution. On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$$

La somme S_n est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

c) Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

Définition 15. — Soient $a_0, \cdots a_{n+1}$ des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Exemple 25. — Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

Proposition 1.9.

Soit $P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ avec $a_0, \cdots a_{n+1}$ tous non nuls. Alors $P_n = \frac{a_{n+1}}{a_0}$

V. Dénombrement

1) Cardinaux

Définition 16. — Un ensemble E est dit fini s'il est soit vide, soit composé d'un nombre fini d'éléments distincts $e_1, \cdots, e_n$. Dans ce cas, on appelle n son cardinal (i.e. son nombre d'éléments), que l'on note $|E|$ ou card(E).
Par convention, $\text{card}(\varnothing) = 0$.

Remarque 18. — Faire du dénombrement, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans avoir à connaître la liste des éléments de E.

Propriété 2. — *Soient* E *et* A *deux ensembles, tels que* $A \subset E$ *et* E *est un ensemble fini. Alors*

- A *est également fini ;*
- $\text{card}(A) \leqslant \text{card}(E)$.

Si, de plus, $\text{card}(A) = \text{card}(E)$, *alors* $A = E$

Remarque 19. — ⚠ Si $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ sans avoir $A \subset E$ on ne peut pas conclure ! Par exemple $A = \{1,2\}$, $E = \{2,3\}$. Alors $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ mais $A \neq E$

Théorème 1.10. Formule du Crible de Poincaré

- Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

- Soient A, B et C trois sous-ensembles d'un ensemble fini E. Alors

$$\text{card}(A\cup B\cup C) = \text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)+\text{card}(A\cap B\cap C)$$

- Soient $A_1, \cdots, A_n$ des sous-ensembles d'un ensemble fini E deux à deux disjoints. Alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \text{card}(A_k)$$

Proposition 1.11.

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble fini E. On note $A \setminus B$ l'ensemble des éléments qui sont dans A mais pas dans B.
Alors

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

Démonstration. Remarquons que les ensembles $A \setminus B$ et $A \cap B$ sont disjoints, de réunion A. D'après le théorème précédent

$$\text{card}(A) = \text{card}\left((A \cap B) \cup (A \setminus B)\right) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B)$$

□

Proposition 1.12.

Soient E et F deux ensembles finis. Alors

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

Démonstration. On note n le cardinal de E et p celui de F. $E \times F$ est constitué des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$. Pour chaque élément x de E, il y a p couples possibles (un couple par élément de F). Puisqu'il y a n éléments dans E, on a donc

$$\underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ fois}} = np \text{ éléments dans } E \times F$$

□

2) Combinaisons

a) Définition

Définition 17. — Soit E un ensemble à n éléments, et p un entier tel que $0 \leqslant p \leqslant n$.
Une **combinaison** de p éléments de E est un sous-ensemble (ou une partie) de E qui contient p éléments.

Exemple 26. — Si $E = \{a, b, c\}$ et $p = 2$, les combinaisons de deux éléments de E sont les parties $\{a, b\}, \{a, c\}$ et $\{b, c\}$.

Notation 1. — Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{p}$ et on lit "p parmi n". On note aussi C_n^p.

Exemple 27. — D'après l'exemple précédent, $\binom{3}{2} = 3$.

Remarque 20. — Pour tout entier n, on obtient rapidement :

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

b) Nombre de combinaisons

Théorème 1.13.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, et pour tout entier p tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Pour $p > n$, on a $\binom{n}{p} = 0$.

Exemple 28. — Le nombre de partie à 4 éléments d'un ensemble à 21 éléments est

$$\binom{21}{4} = \frac{21!}{4!(21-4)!} = 5985$$

Exercice 9. — Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

- Combien y a-t-il de comités possibles ?
- Combien y a-t-il de comités sachant qu'une des personnes doit être une femme ?

Solution.

- Il nous faut choisir (sans ordre) 3 personnes parmi 20. Il y a donc

$$\binom{20}{3} = 1140 \text{ comités possibles}$$

- On veut au moins une femme.

> ⚠ — il n'y a pas $\binom{8}{1}\binom{19}{2}$ comités possibles avec au moins une femme, car en comptant ainsi, certains comités sont comptés plusieurs fois !

Notons A l'ensemble des comités ayant au moins une femme, B l'ensemble des comités n'ayant que des hommes, et C l'ensemble de tous les comités possibles. Alors $A \cup B = C$ et $A \cap B = \emptyset$. Or

$$\text{card}(B) = \binom{12}{3} = 220 \text{ comités}$$

$$\text{card}(C) = \binom{20}{3} = 1140 \text{ comités}$$

Donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(C) - \text{card}(B) = 920 \text{ comités}$$

3) Formules

a) Formules de base

Théorème 1.14.

Pour tous naturels n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

(Formule du triangle de Pascal) Pour tous naturels n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n-1$ on a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

Démonstration.

- En effet,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

- On a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

En mettant au dénominateur commun $p!(n-p)!$, on a alors

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!}+\frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{(n-1)!\left[p+(n-p)\right]}{p!(n-p)!}\\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!}=\binom{n}{p}\end{aligned}$$

□

Remarque 21. — La deuxième formule nous permet d'obtenir tous les nombres combinatoires de proche en proche, dans le **Triangle de Pascal** :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Proposition 1.15.

Pour tout entier n strictement positif, et tout entier k avec $1 \leqslant k \leqslant n$, on a

$$k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}$$

Démonstration. On a, en effet :

$$n\binom{n-1}{k-1}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

soit

$$n\binom{n-1}{k-1}=\frac{k\times n!}{k\times(k-1)!(n-k)!}=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=k\binom{n}{k}$$

□

b) Formule du binôme de Newton

Une autre formule est une relation importante qui servira avec les matrices, ainsi que les applications linéaires.

Théorème 1.16. Formule du binôme de Newton

Pour tous nombres réels a et b, et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{p}a^{n-p}b^p+\cdots+\binom{n}{n-1}ab^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

soit

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. Soit P_n la proposition "$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$" définie pour tout entier $n \geqslant 1$ (*le résultat est également vrai pour* $n = 0$).

- Pour $n = 1$ le résultat est vrai car $(a+b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a + \binom{0}{1} b$.
- Supposons la proposition P_n vraie pour un entier $n \geqslant 1$, et calculons $(a+b)^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= a(a+b)^n + b(a+b)^n \\
&= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \cdots + \binom{n}{p} a^{n-p+1} b^p + \cdots + \binom{n}{n} a b^n \\
&\qquad + \binom{n}{0} a^n b + \cdots + \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p + \cdots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}
\end{aligned}$$

Or pour tout entier $1 \leqslant p \leqslant n$, on a $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$ (formule du triangle de Pascal), donc

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \cdots + \binom{n+1}{p} a^{n-p+1} b^p + \cdots \binom{n+1}{n} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1}$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$ et $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$.

□

Exercice 10. — Calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Solution.

- Prenons $a = b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

  Donc $A_n = (1+1)^n = 2^n$.
- Prenons $a = 2$ et $b = 1$ et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

  Donc $B_n = (1+2)^n = 3^n$.

Proposition 1.17.

Pour tous réels a et b, et tout entier naturel n, on a

$$a^{n+1}-b^{n+1}=(a-b)\left(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}b^2+\cdots+a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n\right)=(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k$$

Solution. Développons la somme, puis faisons un changement de variable :

$$\begin{aligned}(a-b)\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^k &= \sum_{k=0}^{n}a^{n+1-k}b^k-\sum_{k=0}^{n}a^{n-k}b^{k+1}\\ &= a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}a^{n+1-k}b^k-\left(b^{n+1}+\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^{k+1}\right)\\ &\overset{i=k-1}{=} a^{n+1}-b^{n+1}+\cancel{\sum_{i=0}^{n-1}a^{n-i}b^{i+1}}-\cancel{\sum_{k=0}^{n-1}a^{n-k}b^{k+1}}\end{aligned}$$

Exemple 29. — Ainsi, $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$.

VI. Applications

1) Définition

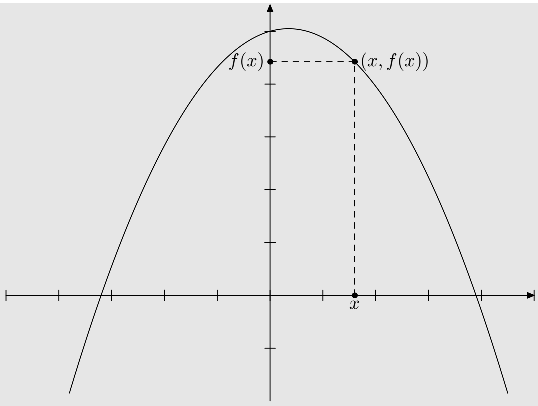
Définition 18. — Soient E et F deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) f de E vers F est une transformation qui, à chaque élément x de E, associe un unique élément y de F. L'élément y de F est alors noté $f(x)$ et est appelé **image** de x par f. x est alors un **antécédent** de $y=f(x)$ par f.
L'ensemble E est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

Notation 2. — On note $f:\mathrm{E}\longrightarrow\mathrm{F}$ pour signifier que f est une application de E vers F.
L'ensemble des fonctions de E vers F est noté $\mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Exemple 30. — $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \mathrm{e}^{-x^2}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\end{array}\right.$ sont des applications.

Remarque 22. — Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur $\mathbb{R}^-$. En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

Définition 19. — L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées $(x,f(x))$ où x est un élément du domaine de définition de f est appelé **graphe** ou **courbe représentative** de la fonction f.



Remarque 23. — Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel $f(x)$ existe.

Exercice 11. — Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \longmapsto \sqrt{x^2-4}$.

Solution. La fonction f est définie si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$. Puisque $x^2-4=(x-2)(x+2)$, et après tableau de signe rapide, on obtient $\mathscr{D}_f =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

2) Opérations sur les fonctions

Définition 20. — Soient f et g deux fonctions définies sur le même ensemble E. Soit λ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur E par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- On appelle $f \times g$ la fonction définie sur E par $(f\times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- On appelle λf la fonction définie sur E par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur E par $(f+\lambda)(x) = f(x)+\lambda$.
- Si g **ne s'annule pas** sur E, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur E par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

Exemple 31. — Soient f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x+1$. Déterminer $f+g$ et $\frac{f}{g}$.

Solution. Par définition, $f+g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f+g)(x) = x^2+e^x+1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{e^x+1}$.

Définition 21. — Soit f une fonction définie sur E et prenant ses valeurs dans F.
Soit g une fonction définie sur F et à valeur dans G.
La fonction qui, à tout réel x de E, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction composée** de f suivie de g. On a ainsi

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g \circ f$.

Exemple 32. — Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \right.$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

Solution. On a, pour tout réel x,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

Remarque 24. — Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

Méthode 1.5.

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

Exemple 33. — Soit $f : x \longmapsto x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

Solution. $g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car g est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Remarque 25 (associativité)**.** — Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$, $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$, $h : \mathrm{G} \to \mathrm{H}$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

3) Injection, surjection

a) Injection

Définition 22. — On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **injective** si f ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

Remarque 26. — On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in \mathrm{E}^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Méthode 1.6.

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments x et x' de E vérifiant $f(x) = f(x')$. On montre alors que nécessairement $x = x'$.

Exemple 34. — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x+1}$ est injective.

Solution. En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $e^{x+1} = e^{x'+1}$, c'est-à-dire $x+1 = x'+1$ en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien $x = x'$.

Remarque 27. — $f : E \to F$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists\, (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

Méthode 1.7.

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

Exemple 35. — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

Solution. En effet, $1 \neq -1$ et pourtant $1^2 = (-1)^2 = 1$.

Théorème 1.18.

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications injectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi injective.

Démonstration. Soient x et x' deux éléments de E tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors, puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme g est injective, on a nécessairement $f(x) = f(x')$. Or, f est aussi injective : on a donc $x = x'$. $g \circ f$ est bien injective. □

Proposition 1.19.

Une fonction $f : E \to F$ strictement monotone est injective.

Rappel 2. — *Une fonction f est strictement croissante si*

$$\forall\, (x, y) \in E^2,\ x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

On dispose également de la stricte décroissance.

Démonstration. Soient x et y deux éléments de E tels que $x \neq y$. Mais alors, on a soit $x < y$ et dans ce cas $f(x) < f(y)$, soit $x > y$ et alors $f(x) > f(y)$. Dans tous les cas $f(x) \neq f(y)$. □

b) Surjection

Définition 23. — On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **surjective** si tout élément de F possède au moins un antécédent par f dans E :

$$\forall\, y \in F, \quad \exists\, x \in E, y = f(x)$$

Méthode 1.8.

Pour prouver qu'une fonction f est surjective, il suffit donc de trouver une solution x à l'équation $f(x) = y$ pour tout élément y de F.

Exemple 36. — Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout x par $f(x) = 2x - 1$ est surjective.

Solution. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \iff x = \frac{y+1}{2}$. Il existe donc au moins un antécédent à y par la fonction f.

Méthode 1.9.

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

Exemple 37. — Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^x$ n'est pas surjective.

Solution. Puisque, pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, la valeur 0 n'est jamais atteinte par f. Ainsi, f n'est pas surjective.

Remarque 28. — On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 1.20.

Si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications surjectives, alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est aussi surjective.

Démonstration. Soit z un élément de G. Puisque g est surjective, il existe un élément $y \in \mathrm{F}$ tel que $g(y) = z$. De plus, f est surjective, donc il existe un élément $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$. Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc x est un antécédent de z par la fonction $g \circ f$. □

c) Bijection

Définition 24. — On dit qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, f est bijective si, et seulement si, chaque élément de F possède un **unique antécédent** par f dans E :

$$\forall\ y \in \mathrm{F}, \quad \exists!\ x \in \mathrm{E}, y = f(x)$$

Méthode 1.10.

Pour démontrer qu'une fonction $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, il faut montrer que, pour tout $y \in \mathrm{F}$, l'équation $f(x) = y$ possède une **unique** solution dans E.

Exemple 38. — Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ est bijective.

Solution. En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \Longleftrightarrow x - 4 = y \Longleftrightarrow x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à y par f.

Exemple 39. — L'application $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie pour tout x de E par $\mathrm{I}d_{\mathrm{E}}(x) = x$ est une bijection de E dans E.

Théorème 1.21.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction. f est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$, telle que $f \circ g = \mathrm{I}d_{\mathrm{F}}$ et $g \circ f = \mathrm{I}d_{\mathrm{E}}$.
La fonction g est appelée **fonction réciproque** de f, et est notée $g = f^{-1}$.

Exemple 40. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$. Montrer que f et g sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

Solution. On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi, f est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction g.

Méthode 1.11.

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction f, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue x.
On obtiendra $x = g(y)$ et g représente alors la fonction réciproque.

Exemple 41. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout réel x par $f(x) = \mathrm{e}^{x+1}$. Déterminer f^{-1}.

Solution. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow \mathrm{e}^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$

qui a un sens car $y > 0$. Ainsi $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \ln(x) - 1$.
Donc $f^{-1} = g$.

Méthode 1.12.

Lorsqu'on donne f et g et qu'on demande de montrer que $g = f^{-1}$, il suffit de montrer que $f \circ g = \mathrm{I}d$ et $g \circ f = \mathrm{I}d$.

Exemple 42. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 2$. Montrer que f^{-1} est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$.

Solution. Notons $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$. Alors, pour tous réels x et y, on a

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$

Ainsi, on a bien $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$: $g = f^{-1}$.

Théorème 1.22.

Soient $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : \mathrm{E} \to \mathrm{G}$ est bijective, et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Démonstration. En effet,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{F}} \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{Id}_{\mathrm{F}} \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathrm{G}}$$

D'après le théorème précédent, $g \circ f$ est bijective, d'application réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$. □

4) Image directe, image réciproque, restriction

Définition 25. — Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction.

- Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$, on appelle **image directe** de A par f, et on note $f(\mathrm{A})$, l'ensemble composé par les images par f des éléments de A :

$$f(\mathrm{A}) = \left\{y \in \mathrm{F},\ \exists x \in \mathrm{A},\ f(x) = y\right\}$$

  Dans le cas où $\mathrm{A} = \mathrm{E}$, on note $\mathrm{Im}\,(f) = f(\mathrm{E})$.
- Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$, on appelle **image réciproque** de B par f, et on note $f^{-1}(\mathrm{B})$, l'ensemble composé par les antécédents par f des éléments de B :

$$f^{-1}(\mathrm{B}) = \left\{x \in \mathrm{E},\ f(x) \in \mathrm{B}\right\}$$

Exemple 43. — Soit $f : x \mapsto x + 2$. Déterminer $f([0;1])$ et $f^{-1}([0;1])$.

Solution. On a :

$$f([0;1]) = [2;3]$$

$$f^{-1}(([0;1]) = [-2;-1]$$

⚠On ne confondra pas l'image réciproque d'un ensemble $f^{-1}(\mathrm{B})$ et l'application réciproque d'une application f^{-1} lorsque celle-ci existe.

Proposition 1.23.

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application. f est surjective si et seulement si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$.

Démonstration. Si f est surjective, tout élément de F admet au moins un antécédent dans E. Donc $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$. Réciproquement, si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$, alors pour tout élément $y \in \mathrm{F}$, il existe un $x \in \mathrm{E}$ tel que $f(x) = y$: par définition, f est surjective. □

Définition 26. — Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une fonction, et $\mathrm{G} \subset \mathrm{E}$. On appelle **restriction** de f à G, et on note $f|_{\mathrm{G}}$ l'application définie sur G par

$$\forall\, x \in \mathrm{G},\ f|_{\mathrm{G}}(x) = f(x)$$

Exemple 44. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2$. f n'est pas injective. En revanche, $f|_{\mathbb{R}^+}$ est injective.

Exercices

Récurrences

Exercice 12. — Démontrer par récurrence les résultats suivants :

- $\forall\ n \geqslant 1, 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$
- (♡) Si a est un réel fixé $a \geqslant -1$,
$$\forall\ n, (1+a)^n \geqslant 1 + na \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$
- Si u est la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n - 3$, alors
$$\forall\ n, u_n = 2^{n+2} + 3$$
- Si $q \neq 1$, alors
$$\forall\ n, 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$
- $\forall\ n \geqslant 1, 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$

Ensemble

Exercice 13. — Soient les ensembles suivants :

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}, B = \{1,3,5,7\}, C = \{2,4,6\}, D = \{3,6\}$$

Déterminer $B \cap D, C \cap D, B \cup C, B \cup D$. Déterminer les complémentaires dans A de B, C et D.

Exercice 14 (Lois de de Morgan et distributivités). — Soient E un ensemble, et A, B et C des sous-ensembles de E. Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

Exercice 15. — Déterminer les éléments de $\mathscr{P}(\{0, 1, 2\})$

Dénombrement

Exercice 16. — On possède un jeu de 32 cartes. On note A l'ensemble "les deux cartes tirées sont rouges", B l'ensemble "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et C l'ensemble "les deux cartes tirées sont un personnage".

Que représente $\overline{A}, A \cap B \cap \overline{C}$ et $(A \cap B) \cap C$?
Ecrire à l'aide des ensembles A, B et C les ensembles F : "les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges", et G : "on obtient au plus un personnage rouge".

Exercice 17. — Parmi 40 étudiants, 8 connaissent le portugais, 15 le chinois, et 9 le russe. D'autres part, 4 parlent chinois et russe, 5 chinois et portugais, 2 russe et portugais et 2 parlent les 3 langues. Combien d'étudiants ne connaissent aucune de ces trois langues ?

Exercice 18. — Au menu d'un restaurant, il y a 3 entrées 2 plats et 4 desserts possibles. Combien de menus (une entrée, un plat, un dessert) sont possibles ?

Exercice 19. — Un anagramme est un mot (ou une succession de lettres) formés des mêmes lettres, dans un ordre différent. Combien d'anagrammes peut on former avec le mot GLACE ? le mot ELEVE ?

Exercice 20. — Calculer

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} \qquad \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k$$

Exercice 21 ($\star$)**.** — On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu'aucun élève n'est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l'année ont la même probabilité d'être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu'au moins deux élèves soient nés le même jour ?

Fonctions

Exercice 22. — Montrer les résultats suivants :

$$\forall\, x > 0, \quad \sqrt{\frac{2}{x+1}} \geqslant \sqrt{\frac{2}{x+4}} \qquad\qquad \forall\, x, \quad \mathrm{e}^{2x+1} \leqslant \mathrm{e}^{x^2+2}$$

Exercice 23. — On considère les fonctions $f : x \longmapsto x^2, g : x \longmapsto \sqrt{x}$ et $h : x \longmapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :

$$f\circ g, f\circ h, g\circ h, h\circ f, h\circ g, g\circ f$$

Exercice 24. — Soit $f : x \longmapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $g : x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer quatre fonctions u, v, w, et z telles que $f = u\circ v$ et $g = w\circ z$.

Exercice 25. — Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+1$.
- $g : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par

$$g(x) = \mathrm{e}^{3+\ln(x)}$$

- $h : \mathbb{R}\setminus\{-1\} \longrightarrow \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{1}{x^3+1}$

Exercice 26. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$.
Déterminer l'image directe par f de $[0;1]$. Déterminer l'image réciproque par f de $\mathbb{R}^+$ et de $[1;\mathrm{e}]$.