

# ENSEMBLE, APPLICATIONS ET RAISONNEMENT

*Ce chapitre introductif est très important. Il pose les bases nécessaires à l'ensemble de l'année d'ATS :*

- *les principes de raisonnement (récurrence, contraposée, absurde);*
- *les notions liées aux ensembles;*
- *les notations  $\Sigma$  et  $\prod$ , avec certains exemples classiques (factorielle, nombre combinatoire);*
- *les notions de bases sur les applications, qui feront l'objet de chapitres supplémentaires.*

*Même si ce chapitre est un peu abrupt, il faut régulièrement y revenir pour maîtriser l'ensemble des éléments présents.*

## Objectifs

*La liste ci-dessous représente les éléments à maîtriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.*

- ① mener un raisonnement par récurrence .....
- ② maîtriser les raisonnements élémentaires :
  - le raisonnement par contraposée .....
  - le raisonnement par l'absurde .....
  - la justification d'équivalence et d'implication .....
- ③ maîtriser les symboles  $\Sigma$  et  $\prod$  :
  - le changement de variable dans une somme .....
  - la simplification d'une somme télescopique .....
- ④ maîtriser la factorielle et les nombres combinatoires :
  - la définition de  $n!$  et de  $\binom{n}{p}$  .....
  - la formule du binôme de Newton .....
  - la formule du triangle de Pascal .....
  - la factorisation de  $a^{n+1} - b^{n+1}$  .....
- ⑤ connaître les notions importantes liées aux applications :
  - les définitions d'injection, surjection, et bijection, ainsi que les méthodes .....
  - la définition d'image directe, d'image réciproque et de restriction .....

## I. Raisonnement par récurrence

### 1) Principe de récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement important des mathématiques. Pour le comprendre, nous allons partir d'un exemple :

**Exemple 1.** — On considère la proposition  $P(n)$  dépendant d'un entier  $n$  : “  $2^n \geq n + 1$  ”

Vérifions que cette propriété est vraie pour  $n = 0, 1, 2, 3, 4$  :

$$\text{Pour } n = 0 : \quad 2^0 = 1 \geq 0 + 1 = 1$$

$$\text{Pour } n = 1 : \quad 2^1 = 2 \geq 1 + 1 = 2$$

$$\text{Pour } n = 2 : \quad 2^2 = 4 \geq 2 + 1 = 3$$

$$\text{Pour } n = 3 : \quad 2^3 = 8 \geq 3 + 1 = 4$$

$$\text{Pour } n = 4 : \quad 2^4 = 16 \geq 4 + 1 = 5$$

On peut continuer les vérifications pour tous les entiers que l'on souhaite, mais on ne pourra jamais affirmer que la proposition est vraie **pour tout  $n$** . Pour démontrer cette proposition, on va faire appel au **raisonnement par récurrence**.

**Axiome 1.** — Soit  $P(n)$  une proposition dépendant d'un entier, et  $n_0$  un entier fixé.

- Si  $P(n_0)$  est vraie (**initialisation**),
- et si pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$  (**hérédité**),

alors  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n \geq n_0$ .

*Démonstration.* Ceci est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui ne se démontre pas, mais qui semble “logique”.

L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes).  $\square$

**Remarque 1.** — Si, pour tout entier  $n \geq n_0$ ,  $P(n) \Rightarrow P(n + 1)$ , on dit que la propriété  $P$  est **héréditaire**.

*Solution.* Démontrons maintenant la propriété  $P(n)$  : “  $2^n \geq n + 1$  ” pour  $n \geq 0$  par récurrence :

- **initialisation** : pour  $n = 0$ , on a bien  $2^0 = 1 \geq 0 + 1 = 1$ .
- **hérédité** : supposons que la propriété  $P(n)$  soit vraie pour **un certain  $n$**  fixé. On a donc  $2^n \geq n + 1$  : c'est l'**hypothèse de récurrence**  
On veut alors démontrer  $P(n + 1)$ , c'est à dire  $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$

$$\begin{aligned} 2^n \geq n + 1 &\Leftrightarrow 2 \times 2^n \geq 2(n + 1) && \text{car } 2 \text{ est un nombre positif} \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} \geq 2n + 2 \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} - (n + 1 + 1) \geq 2n + 2 - (n + 1 + 1) \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} - (n + 2) \geq n \geq 0 && \text{car } n \text{ est un entier positif ou nul} \end{aligned}$$

On a donc bien  $2^{n+1} \geq (n + 1) + 1$  : la proposition  $P(n + 1)$  est donc vérifiée.

On a bien démontré l'initialisation et l'hérédité : on a donc démontré par récurrence que la propriété

$P(n)$  est vraie **pour tout entier  $n$**  :

$$\forall n, 2^n \geq n + 1$$

**Exercice 1.** — Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

$$1. \forall n \geq 1, 1 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$2. \forall n \geq 1, 1^2 + \dots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

*Solution.*

1. Soit  $P_n$  la proposition définie pour tout  $n \geq 1$  par  $P_n : "1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}"$ .

- Initialisation : pour  $n = 1$ , on a d'une part 1, et d'autre part  $\frac{1(1+1)}{2} = 1$ . Donc  $P_1$  est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition  $P_n$  soit vraie pour un certain  $n \geq 1$ , et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Or,  $1 + 2 + \dots + (n+1) = (1 + 2 + \dots + n) + (n+1)$ . D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc

$$1 + \dots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left( \frac{n}{2} + 1 \right) = (n+1) \frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Ainsi, la proposition  $P_{n+1}$  est vraie, et la propriété  $P$  est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition  $P_n$  est donc vraie pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\forall n \geq 1, 1 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. Soit  $Q_n$  la proposition définie pour tout  $n \geq 1$  par  $Q_n : "1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}"$ .

- Initialisation : pour  $n = 1$ , on a d'une part  $1^2 = 1$ , et d'autre part  $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ . Donc  $Q_1$  est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition  $Q_n$  soit vraie pour un certain  $n \geq 1$ , et montrons que  $Q_{n+1}$  est vraie.

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Comme précédemment, on a alors

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = (n+1) \left( \frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right)$$

soit

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1) \frac{2^n 2 + n + 6n + 6}{6} = (n+1) \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}$$

Or,  $(n+2)(2(n+1)+1) = (n+2)(2n+3) = 2^n 2 + 7n + 6$ . Donc,

$$1^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = (n+1) \frac{(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ainsi, la proposition  $Q_{n+1}$  est vraie, et la propriété  $Q$  est donc héréditaire.

D'après le principe de récurrence, la proposition  $Q_n$  est donc vraie pour tout entier  $n \geq 1$  :

$$\forall n \geq 1, 1^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$



Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVIIe siècle), ce sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connaît.

Le raisonnement par récurrence est également utile pour démontrer des résultats de divisibilité.

**Exemple 2.** — Montrer par récurrence que, pour tout entier  $n$ ,  $10^n - (-1)^n$  est un multiple de 11.

*Solution.* Soit  $P(n)$  la proposition “  $10^n - (-1)^n$  est un multiple de 11 ”

- **initialisation** : pour  $n = 0$ ,  $10^0 - (-1)^0 = 0 = 0 \times 11$ .
- **hérédité** : supposons  $P(n)$  vraie pour **un certain**  $n$ . On peut donc écrire  $10^n - (-1)^n = 11 \times p$  où  $p$  est un nombre entier. On a alors

$$\begin{aligned} 10^n &= 11 \times p + (-1)^n \\ 10 \times 10^n &= 10 \times 11 \times p + 10 \times (-1)^n \\ 10^{n+1} &= 110 + 10 \cdot (-1)^n \\ 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 110p + 10 \cdot (-1)^n - (-1)^{n+1} \\ 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 11 \times 10p + (-1)^n [10 - (-1)] \\ 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 11 \times 10p + (-1)^n \times 11 \\ 10^{n+1} - (-1)^{n+1} &= 11 \times [10p + (-1)^n] \end{aligned}$$

Donc  $10^{n+1} - (-1)^{n+1}$  est bien un multiple de 11 :  $P(n+1)$  est vraie.

On a donc bien démontré  $P(n)$  pour tout  $n$ .

## 2) Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

**Axiome 2** (Principe de récurrence double). — Soit  $P(n)$  une proposition dépendant d'un entier  $n$ .

- Si  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.
- et si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \implies P(n+2)$

alors  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n$ .

**Axiome 3** (Principe de récurrence forte). — Soit  $P(n)$  une proposition dépendant d'un entier  $n$ .

- Si  $P(0)$  est vraie.
- et si, pour tout entier naturel  $n$ ,  $(P(0), P(1), \dots, P(n)) \implies P(n+1)$

alors  $P(n)$  est vraie pour tout entier  $n$ .

**Remarque 2.** — On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois  $n$ ,  $n+1$  et  $n+2$ .

**Exemple 3.** — Soit  $u$  la suite définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 3$  et pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$ . Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $u_n = 1 + 2^n$ .

*Solution.* Soit  $P$  la proposition définie pour tout entier  $n$  par  $P(n)$  : " $u_n = 1 + 2^n$ ".

- **initialisation** : pour  $n = 0$  on a  $u_0 = 2 = 1 + 2^0$  et pour  $n = 1$  on a  $u_1 = 3 = 1 + 2^1$ . Ainsi  $P(0)$  et  $P(1)$  sont vraies.
- **hérédité** : supposons que les propositions  $P(n)$  et  $P(n+1)$  sont vraies pour un certain entier  $n$  fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que  $u_n = 1 + 2^n$  et  $u_{n+1} = 1 + 2^{n+1}$ . Alors, par définition de  $u$ , on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\stackrel{\text{H.R.}}{=} 3(1 + 2^{n+1}) - 2(1 + 2^n) \\ &= 3 + 3 \cdot 2^{n+1} - 2 - 2 \cdot 2^n \\ &= 1 + 3 \cdot 2^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2 \cdot 2^{n+1} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

Ainsi,  $P(n+2)$  est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition  $P_n$  est donc vraie pour tout entier  $n \geq 1$  :

## II. Autres raisonnements

### 1) Symboles mathématiques

Nous utiliserons très souvent plusieurs symboles mathématiques. Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques** ! Ce ne sont pas des abréviations.

- **quantificateur universel** :  $\forall$  signifie "pour tout" ou "quel que soit".
- **quantificateur existentiel** :  $\exists$  signifie "il existe".
- $\exists!$  signifie "il existe un unique".

On utilise / , | ou simplement " ," pour signifier "tel que".

**Exemple 4.** —  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists! y \in \mathbb{R}, y = x + 1$  signifie : "pour tout réel  $x$ , il existe un unique réel  $y$  tel que  $y = x + 1$ ".

**Exercice 2.** — Traduire les phrases mathématiques suivantes :

- $\forall x \geq 0, \exists ! y \geq 0, y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = x^2 + x$

*Solution.*

- La première se traduit par “pour tout réel  $x$  positif, il existe un unique  $y$  positif tel que  $y^2 = x$ ”. Ainsi, cette phrase traduit l’existence de  $\sqrt{x}$  pour tout réel  $x$  positif.
- La deuxième se traduit par “il existe un réel  $x$  tel que  $x^2 + 1 = x^2 + x$ ”. Elle traduit donc l’existence d’une solution à l’équation  $x^2 + 1 = x^2 + x$ .

**Remarque 3.** — Dans une proposition, on peut intervertir deux quantificateurs identiques mais **on ne doit pas** intervertir deux quantificateurs différents.

**Exemple 5.** — Traduire en français les propositions suivantes. Signifient-elles la même chose ?

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x = y + 1 \quad \text{et} \quad \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x = y + 1$$

*Solution.* La première signifie “pour tout réel  $x$ , il existe un réel  $y$  tel que  $x = y + 1$ ”. Cette proposition est vraie (il suffit de prendre  $y = x - 1$ ).

La deuxième signifie “il existe un réel  $y$  tel que pour tout réel  $x$ ,  $x = y + 1$ ” qui est, quant à elle, clairement fausse (contre-exemple : il suffit de prendre  $x = y$ ).

**Proposition 1.** — Lorsqu’on nie une proposition (on écrit sa **négation**), on échange quantificateur universel et quantificateur existentiel.

**Remarque 4.** — La négation de  $\forall x \in \mathbb{R}, \dots$  est donc  $\exists x \in \mathbb{R}, \dots$ . Ainsi, pour réfuter une proposition universelle, il suffit d’exhiber un **contre-exemple**.

**Exercice 3.** — Déterminer la négation de la proposition :  $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq m$ .

*Solution.* La négation est :  $\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) < m$ .

## 2) Implication et équivalence

Nous disposons aussi de certains connecteurs logiques :

- $\Leftrightarrow$  : c’est l’équivalence, le “si et seulement si”.
- $\Leftarrow$  et  $\Rightarrow$  : les implications.

**Remarque 5.** — Lorsque l’on a  $A \Rightarrow B$ , on dit que  $B$  est la condition nécessaire, et  $A$  la condition suffisante. En effet, il **suffit** d’avoir  $A$  pour avoir  $B$ , et il est **nécessaire** d’avoir  $B$  si on a  $A$ . Lorsqu’on a  $A \Leftrightarrow B$ ,  $A$  et  $B$  sont des conditions nécessaires et suffisantes.

**Définition 1.** — Si  $A \Rightarrow B$  (sens direct), alors sa **réciproque** est  $B \Rightarrow A$ .  
Si on a à la fois le sens direct et sa réciproque, on a alors l'équivalence.

### 3) Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde

**Définition 2.** — Si  $A$  est une proposition, on note  $\text{non } A$ , ou  $\bar{A}$  sa négation.

**Exemple 6.** — Si  $A$  est la proposition  $\forall x, x > 0$ , alors sa négation est  $\bar{A} : \exists x, x \leq 0$ .

**Théorème 1.** — On a l'équivalence entre  $A \Rightarrow B$  (raisonnement direct) et  $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$  (raisonnement par contraposée).

Pour démontrer un résultat du type  $A \Rightarrow B$ , il est souvent plus commode d'utiliser un raisonnement par contraposée : on suppose que l'on a  $\bar{B}$  et on démontre qu'alors on a  $\bar{A}$ .

**Exemple 7.** — Démontrer que  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

*Solution.* Un raisonnement direct est compliqué à faire rigoureusement. En revanche, la contraposée de  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$  est  $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$ , qui est vrai. Donc on a bien  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

**Remarque 6.** — On peut enfin utiliser un raisonnement par l'absurde : si on veut montrer  $A \Rightarrow B$ , on suppose que l'on a  $A$  et  $\bar{B}$  en même temps, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

**Exercice 4.** — Démontrer que  $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$  par l'absurde.

*Solution.* Par l'absurde, on suppose que  $x \neq 0$  et que  $x^2 = 0$ . Mais alors, si  $x^2 = 0$ ,  $x = 0$ . Or  $x \neq 0$  : c'est absurde ! Ainsi, notre hypothèse de départ est fautive, et  $x^2 \neq 0$ .

### 4) Égalité

#### Méthode 1 :

Pour démontrer une égalité :

- ① on introduit les variables nécessaires avec les mots "soit", ou "pour tout".
- ② en partant d'un des deux membres, on aboutit à l'autre membre par des égalités successives.
- ③ on conclut.

**Exemple 8.** — Montrer que pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

*Solution.* Soient  $a$  et  $b$  deux réels. Alors, en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned} (a - b)(a^2 + ab + b^2) &= a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) \\ &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3 \\ &= a^3 - b^3 \end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels  $a$  et  $b$ ,  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ .

## 5) Équation et inéquation

Lorsqu'on résout une équation ou une inéquation, il est important de raisonner par équivalence. Si on raisonne par implication, il est **nécessaire** de vérifier les résultats obtenus.

Pour résoudre une équation, on peut :

- partir de l'équation qu'on modifie (par équivalence) pour aboutir au résultat ;
- regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise ;
- ou enfin, on regroupe tous les termes dans un même membre, et on étudie une fonction.

**Exemple 9.** — Résoudre dans  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation  $\ln(x) = x - 1$ .

*Solution.* L'équation s'écrit également  $\ln(x) - x + 1 = 0$ . Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = \ln(x) - x + 1$ . Elle est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$ , et sa dérivée est

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient ainsi le tableau de signe et variations suivant :

$x$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 -
$f(x)$			

Ainsi, l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution :  $x = 1$ .

### Méthode 2 :

Pour résoudre une inéquation :

- ① on introduit les variables nécessaires avec les mots “soit”, ou “pour tout”.
- ② on part de l'équation ou l'inéquation, et on résout en appliquant différentes propriétés par équivalence
- ③ ou alors on regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise, pour dresser un tableau de signe.
- ④ on conclut.

**Rappel 1.** — Les propriétés suivantes n'ont pas à être justifiées.

- On ne modifie pas une équation en ajoutant un même nombre, en multipliant ou divisant par un même nombre non nul, en simplifiant ou en appliquant une fonction strictement monotone.
- Ajouter un terme à une inégalité ne change pas le sens de celle-ci, de même que multiplier l'inégalité par un même nombre positif. En revanche, multiplier par un nombre négatif une inégalité change le sens de celle-ci.

Quand on résout une inéquation, on justifiera **toutes** les étapes non triviales, par exemple en utilisant les variations d'une fonction.



**Exemple 10.** — Résoudre l'inéquation  $3x - 3 < 1 - 2x$ .

*Solution.* On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x - 3 < 1 - 2x &\iff 5x - 3 < 1 \\ &\iff 5x < 4 \\ &\iff x < \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ainsi,  $\mathcal{S} = ]-\infty; \frac{4}{5}[$ .

**Remarque 7.** — On peut utiliser des mots en français (“c’est-à-dire”, “si et seulement si”) pour remplacer le symbole  $\iff$ , mais aussi pour l’implication (“donc”, “puis”, “soit”).

### III. Ensembles

#### 1) Ensembles et éléments

**Définition 3.** — On appelle **ensemble** toute *collection* d’objets, appelés **éléments** de cet ensemble. Pour signifier que l’élément  $x$  appartient à un ensemble  $E$ , on note  $x \in E$ . Si  $x$  n’appartient pas à  $E$ , on écrit  $x \notin E$ .

**Exemple 11.** —  $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  sont des ensembles usuels. On a  $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ , mais  $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ .  $\{x_1, \dots, x_n\}$  est l’ensemble constitué uniquement de  $x_1, \dots, x_n$ .

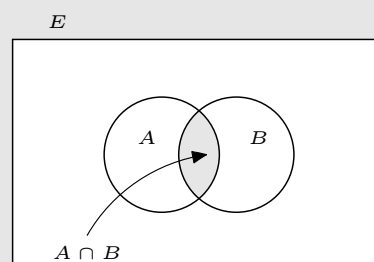
**Définition 4.** — L’ensemble constitué d’aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté  $\emptyset$ .

**Remarque 8.** —  $\triangleleft$  On note  $\emptyset$  et non  $\{\emptyset\}$ .

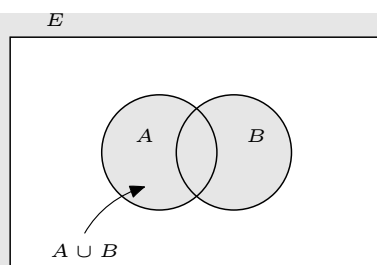
#### 2) Union, intersection

**Définition 5.** — Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles.

- On appelle **intersection** de  $A$  et de  $B$ , noté  $A \cap B$ , l’ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans  $A$  et dans  $B$ .



- On appelle **réunion** (ou **union**) de  $A$  et de  $B$ , noté  $A \cup B$ , l’ensemble constitué des éléments qui sont dans  $A$  ou dans  $B$  (voire dans les deux).



**Exemple 12.** — Si  $A = \{1; 2; 4\}$  et  $B = \{2; 4; 5\}$  alors

$$A \cup B = \{1; 2; 4; 5\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2; 4\}$$

### 3) Inclusion, sous-ensemble

**Définition 6.** — Soit  $E$  un ensemble. On dit que  $F$  est **inclus** dans  $E$ , et on note  $F \subset E$ , si tous les éléments de  $F$  sont aussi des éléments de  $E$ . On dit alors que  $F$  est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de  $E$ .

**Exemple 13.** —  $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ ,  $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$ .

**Définition 7.** — Soit  $E$  un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de  $E$ , et on note  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble formé des sous-ensembles de  $E$ .

**Exemple 14.** — On a  $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$

**Exercice 5.** — Déterminer  $\mathcal{P}(\{a, b, c\})$ .

*Solution.* Si  $E = \{a, b, c\}$ , alors

$$\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

**Théorème 2.** — Soit  $E$  un ensemble possédant  $n$  éléments (avec  $n \geq 1$ ). Alors  $\mathcal{P}(E)$  possède  $2^n$  éléments.

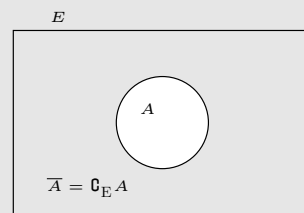
*Démonstration.* Pour construire un sous-ensemble de  $E$ , il faut prendre certains éléments de  $E$  et pas d'autres. Si on note  $x_1; \dots; x_n$  les éléments de  $E$ , alors pour chaque élément  $x_k$ , on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a  $n$  éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc

$$\underbrace{2 \times \dots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

□

#### 4) Complémentaire

**Définition 8.** — Soit  $E$  un ensemble et  $A$  un sous-ensemble de  $E$ . On appelle **complémentaire** de  $A$ , et on note  $\bar{A}$  ou  $\complement_E(A)$ , l'ensemble des éléments de  $E$  qui ne sont pas dans  $A$  :  $\bar{A} = E \setminus A$ .



Ainsi  $\bar{A}$  est l'ensemble qui vérifie  $A \cap \bar{A} = \emptyset$  et  $A \cup \bar{A} = E$ .

**Exemple 15.** — Si  $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $A = \{1, 2, 4\}$  alors  $\bar{A} = \{3, 5\}$ .

**Théorème 3** (Lois de de Morgan). — Soit  $E$  un ensemble, et soient  $A, B$  deux sous-ensembles de  $E$ .

- $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$
- $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

**Remarque 9.** — Ainsi, la négation d'un “et” est un “ou”, et réciproquement la négation d'un “ou” est un “et”.

#### Méthode 3 :

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on utilise la **double inclusion** : si  $C \subset D$  et  $D \subset C$  alors nécessairement  $C = D$ .

*Démonstration.*

- Soit  $x \in \overline{A \cup B}$ . Cela veut dire qu'il n'est pas dans  $A \cup B$ . Donc il n'est ni dans  $A$ , ni dans  $B$  : il est donc dans  $\bar{A} \cap \bar{B}$ .
- Soit  $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$ . Il n'est donc pas dans  $A$ , et il n'est pas dans  $B$  : il n'est donc pas dans  $A \cup B$ . Ainsi,  $x \in \overline{A \cup B}$ .

L'autre égalité se montre de la même manière. □

#### 5) Produit cartésien

**Définition 9.** — Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de  $E$  et  $F$ , noté  $E \times F$ , l'ensemble formé des couples  $(a, b)$  avec  $a \in E$  et  $b \in F$ .

**Exemple 16.** — Si  $E = \{a, b\}$  et  $F = \{-1, 1\}$  alors  $E \times F = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$

**Remarque 10.** —

- Si  $E = F$ , on note en général  $E \times E = E^2$ .
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble  $E_1 \times \cdots \times E_n = \prod_{k=1}^n E_k$

**Exemple 17.** — Les deux exemples classiques sont  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$  et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n), x_1 \in \mathbb{R}, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple,  $(1, -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$  et  $(0, 0, 1) \in \mathbb{R}^3$ .

**Définition 10.** — Un élément  $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$  est appelé un ***p*-uplet** ou une ***p*-liste**.

## IV. Sommes et produits

### 1) Définitions et propriétés

#### a) Définition

**Définition 11.** — Soient  $n$  et  $p$  deux entiers tels que  $p < n$ . On note  $\llbracket p, n \rrbracket = \{p; p+1; \dots; n\}$ .

**Exemple 18.** — Par exemple,  $\llbracket 2, 5 \rrbracket = \{2, 3, 4, 5\}$ .

**Remarque 11.** — Il y a  $n$  entiers dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ , et  $n+1$  entiers dans  $\llbracket 0, n \rrbracket$ . Il y a  $n-p+1$  entiers dans  $\llbracket p, n \rrbracket$ .

**Exemple 19.** — Il y a 7 entiers dans  $\llbracket 2, 8 \rrbracket$ .

**Définition 12.** —

- Soient  $a_0, a_1, \dots, a_n$  des réels. On note

$$\sum_{k=0}^n a_k = a_0 + a_1 + \dots + a_n$$

et on lit “somme de  $k=0$  à  $n$  des  $a_k$ ”.

- Soient  $a_p, \dots, a_n$  des réels ( $p \leq n$ ). On note

$$\sum_{k=p}^n a_k = a_p + \dots + a_n$$

et on lit “somme de  $k=p$  à  $n$  des  $a_k$ ”.

**Exemple 20.** — Par exemple,  $\ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n) = \sum_{k=2}^n \ln(k)$ . La notation  $\ln(2) + \ln(3) + \dots + \ln(n)$  est appelée **notation en extension**.

**Exercice 6.** — Ecrire la notation en extension de  $\sum_{k=2}^{30} k$  et  $\sum_{n=1}^p \sqrt{n}$ .

Ecrire à l'aide du symbole  $\Sigma$  l'expression  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$  et  $2 + 4 + 6 + \dots + 18$ .

*Solution.* On a, rapidement,  $\sum_{k=2}^{30} k = 2 + 3 + \dots + 30$ ,  $\sum_{n=1}^p \sqrt{n} = 1 + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{p}$ ,

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

et

$$2 + 4 + \dots + 18 = \sum_{k=1}^9 2k$$

**Remarque 12.** — L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi  $\sum_{k=1}^n k^2$  représente la même somme que  $\sum_{k=n}^1 k^2$ .

**Remarque 13.** — On définit de la même manière  $a_p \times a_{p+1} \times \dots \times a_n = \prod_{k=p}^n a_k$ .

**Définition 13.** — Soit  $n$  un entier non nul. On appelle **factorielle** de  $n$ , et on note  $n!$ , le nombre  $n! = \prod_{k=1}^n k$ .  
Par convention,  $0! = 1$ .

**Remarque 14.** — On a ainsi  $1! = 1$ ,  $2! = 1 \times 2 = 2$  et  $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ .

**Proposition 2.** — Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

*Démonstration.* En effet, par définition,

$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \dots \times n}_{=n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

□

**Exercice 7.** — Pour  $n \geq 1$ , simplifier  $\frac{(n+2)!}{n!}$ .

*Solution.* On a

$$\frac{(n+2)!}{n!} = \frac{(n+2)(n+1)n!}{n!} = (n+2)(n+1)$$

## b) Première propriétés

Soient deux entiers  $p$  et  $n$  tels que  $p \leq n$ , soient  $a_p, \dots, a_n, b_p, \dots, b_n$  des réels.

- Linéarité :  $\sum_{k=p}^n (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=p}^n b_k$  et  $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \sum_{k=p}^n \lambda \cdot a_k = \lambda \sum_{k=p}^n a_k$ .
- Relation de Chasles : pour tout entier  $m > n$ ,  $\sum_{k=p}^m a_k = \sum_{k=p}^n a_k + \sum_{k=n+1}^m a_k$ .
- $\prod_{k=p}^n (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^n a_k \times \prod_{k=p}^n b_k$
- $\forall \lambda, \prod_{k=p}^n (\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^n a_k$

## c) ln et exp

**Propriété 1.** —

- Pour tous réels  $a_p, \dots, a_n$ , on a  $\exp\left(\sum_{k=p}^n a_k\right) = \prod_{k=p}^n e^{a_k}$ .
- Pour tous réels  $a_p > 0, \dots, a_n > 0$ , on a  $\ln\left(\prod_{k=p}^n a_k\right) = \sum_{k=p}^n \ln(a_k)$ .

## d) Sommes usuelles

**Proposition 3** (♥). — On dispose des résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^n 1 = n+1, \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \quad (\text{si } q \neq 1)$$

*Démonstration.* Elles ont été vues précédemment. □

## 2) Changement de variables

### a) Variables muettes

**Remarque 15.** — Lorsqu'on écrit  $\sum_{k=p}^n a_k$ , la variable  $k$  est appelée **variable muette** : on peut la rem-

placer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^n a_k = \sum_{i=p}^n a_i = \sum_{z=p}^n a_z$$

### b) Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à ré-écrire la somme différemment.

**Proposition 4.** — Soient  $p \leq n$  deux entiers,  $l$  un entier, et  $a_{p+l}, \dots, a_{n+l}$  des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^n a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable  $j = k - l$  : ainsi, si  $k = p + l$ , alors  $j = p$ . De même,  $k = n + l$  amène  $j = n$ .

#### Méthode 4 :

Pour faire un changement de variable  $j = f(k)$ , on procède en remplaçant toutes les occurrences de  $k$  par son expression en fonction de  $j$ , mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence !

**Exemple 21.** — Calculer  $S = \sum_{k=0}^n (n - k)$  en posant  $j = n - k$ .

*Solution.* Posons  $j = n - k$ . Alors

$$S = \sum_{j=n}^0 j = \sum_{j=0}^n j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

### c) Sommes doubles

**Remarque 16.** — On peut envisager de calculer des sommes de sommes. Dans ce cas, on fera attention à utiliser deux variables différentes.

**Exemple 22.** — La somme suivante est une somme double :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij$$

**Remarque 17.** — On peut calculer la somme précédente. En effet, lorsqu'on somme sur  $j$ , la variable  $i$  est une variable indépendante. Ainsi

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n ij = \sum_{i=1}^n i \sum_{j=1}^n j = \frac{n(n+1)}{2} \frac{n(n+1)}{2} = \left( \frac{n(n+1)}{2} \right)^2$$

Dans certains cas, on ne peut pas séparer les variables, quand une somme dépend d'une des variables. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j$$

Dans ce cas, on peut calculer la somme, mais en étant rigoureux :

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i j = \sum_{i=1}^n \frac{i(i+1)}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n i^2 + i = \frac{1}{2} \left( \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} \right)$$

### 3) Sommes télescopiques

#### a) Définition

**Définition 14.** — Soient  $a_0, \dots, a_{n+1}$  des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k$$

**Exemple 23.** — La somme  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$  est une somme télescopique.

#### b) Simplification

**Proposition 5.** — Soit  $S_n = \sum_{k=0}^n a_{k+1} - a_k$ . Alors

$$S_n = a_{n+1} - a_0$$

*Démonstration.* En effet,

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{n+1}$$

□

**Exemple 24.** — La somme  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$  se simplifie en

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

**Exercice 8.** — Soit  $S_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$ . Simplifier  $S_n$ .

*Solution.* On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln(k+1) - \ln(k)$$



La somme  $S_n$  est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

### c) Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

**Définition 15.** — Soient  $a_0, \dots, a_{n+1}$  des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

**Exemple 25.** — Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^n \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

**Proposition 6.** — Soit  $P_n = \prod_{k=0}^n \frac{a_{k+1}}{a_k}$  avec  $a_0, \dots, a_{n+1}$  tous non nuls. Alors  $P_n = \frac{a_{n+1}}{a_0}$

## V. Dénombrement

### 1) Cardinaux

**Définition 16.** — Un ensemble  $E$  est dit fini s'il est soit vide, soit composé d'un nombre fini d'éléments distincts  $e_1, \dots, e_n$ . Dans ce cas, on appelle  $n$  son cardinal (i.e. son nombre d'éléments), que l'on note  $|E|$  ou  $\text{card}(E)$ .

Par convention,  $\text{card}(\emptyset) = 0$ .

**Remarque 18.** — Faire du dénombrement, c'est déterminer le nombre d'éléments d'un ensemble, sans avoir à connaître la liste des éléments de  $E$ .

**Propriété 2.** — Soient  $E$  et  $A$  deux ensembles, tels que  $A \subset E$  et  $E$  est un ensemble fini. Alors

- $A$  est également fini;
- $\text{card}(A) \leq \text{card}(E)$ .

Si, de plus,  $\text{card}(A) = \text{card}(E)$ , alors  $A = E$

**Remarque 19.** —  $\triangleleft$  Si  $\text{card}(A) = \text{card}(E)$  sans avoir  $A \subset E$  on ne peut pas conclure! Par exemple  $A = \{1, 2\}$ ,  $E = \{2, 3\}$ . Alors  $\text{card}(A) = \text{card}(E)$  mais  $A \neq E$

**Théorème 4** (Formule du Crible de Poincaré). —

- Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$ . Alors

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$$

- Soient  $A, B$  et  $C$  trois sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$ . Alors

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C)$$

- Soient  $A_1, \dots, A_n$  des sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$  deux à deux disjoints. Alors

$$\text{card}\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) = \sum_{k=1}^n \text{card}(A_k)$$

**Proposition 7.** — Soient  $A$  et  $B$  deux sous-ensembles d'un ensemble fini  $E$ . On note  $A \setminus B$  l'ensemble des éléments qui sont dans  $A$  mais pas dans  $B$ .

Alors

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B)$$

*Démonstration.* Remarquons que les ensembles  $A \setminus B$  et  $A \cap B$  sont disjoints, de réunion  $A$ . D'après le théorème précédent

$$\text{card}(A) = \text{card}((A \cap B) \cup (A \setminus B)) = \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \setminus B)$$

□

**Proposition 8.** — Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles finis. Alors

$$\text{card}(E \times F) = \text{card}(E) \times \text{card}(F)$$

*Démonstration.* On note  $n$  le cardinal de  $E$  et  $p$  celui de  $F$ .  $E \times F$  est constitué des couples  $(x; y)$  avec  $x \in E$  et  $y \in F$ . Pour chaque élément  $x$  de  $E$ , il y a  $p$  couples possibles (un couple par élément de  $F$ ). Puisqu'il y a  $n$  éléments dans  $E$ , on a donc

$$\underbrace{p + \dots + p}_{n \text{ fois}} = np \text{ éléments dans } E \times F$$

□

## 2) Combinaisons

### a) Définition

**Définition 17.** — Soit  $E$  un ensemble à  $n$  éléments, et  $p$  un entier tel que  $0 \leq p \leq n$ .

Une **combinaison** de  $p$  éléments de  $E$  est un sous-ensemble (ou une partie) de  $E$  qui contient  $p$  éléments.

**Exemple 26.** — Si  $E = \{a, b, c\}$  et  $p = 2$ , les combinaisons de deux éléments de  $E$  sont les parties  $\{a, b\}, \{a, c\}$  et  $\{b, c\}$ .

**Notation 1.** — Le nombre de combinaisons de  $p$  éléments d'un ensemble à  $n$  éléments est noté  $\binom{n}{p}$  et on lit “ $p$  parmi  $n$ ”. On note aussi  $C_n^p$ .

**Exemple 27.** — D'après l'exemple précédent,  $\binom{3}{2} = 3$ .

**Remarque 20.** — Pour tout entier  $n$ , on obtient rapidement :

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{n} = 1$$

## b) Nombre de combinaisons

**Théorème 5.** — Pour tout entier  $n \geq 1$ , et pour tout entier  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$ , on a

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Pour  $p > n$ , on a  $\binom{n}{p} = 0$ .

**Exemple 28.** — Le nombre de partie à 4 éléments d'un ensemble à 21 éléments est

$$\binom{21}{4} = \frac{21!}{4!(21-4)!} = 5985$$

**Exercice 9.** — Dans une association de 12 hommes et 8 femmes, on crée un comité Hygiène et Sécurité, composé de 3 personnes.

- Combien y a-t-il de comités possibles ?
- Combien y a-t-il de comités sachant qu'une des personnes doit être une femme ?

*Solution.*

- Il nous faut choisir (sans ordre) 3 personnes parmi 20. Il y a donc

$$\binom{20}{3} = 1140 \text{ comités possibles}$$

- On veut au moins une femme.

⚠ — il n'y a pas  $\binom{8}{1}\binom{19}{2}$  comités possibles avec au moins une femme, car en comptant ainsi, certains comités sont comptés plusieurs fois !

Notons A l'ensemble des comités ayant au moins une femme, B l'ensemble des comités n'ayant

que des hommes, et C l'ensemble de tous les comités possibles. Alors  $A \cup B = C$  et  $A \cap B = \emptyset$ . Or

$$\text{card}(B) = \binom{12}{3} = 220 \text{ comités}$$

$$\text{card}(C) = \binom{20}{3} = 1140 \text{ comités}$$

Donc

$$\text{card}(A) = \text{card}(C) - \text{card}(B) = 920 \text{ comités}$$

### 3) Formules

#### a) Formules de base

**Théorème 6.** — Pour tous naturels  $n$  et  $p$  tels que  $0 \leq p \leq n$ , on a

$$\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$$

(Formule du triangle de Pascal) Pour tous naturels  $n$  et  $p$  tels que  $1 \leq p \leq n-1$  on a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$$

*Démonstration.*

- En effet,

$$\binom{n}{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} = \frac{n!}{(n-p)!p!} = \binom{n}{p}$$

- On a

$$\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-p-1)!}$$

En mettant au dénominateur commun  $p!(n-p)!$ , on a alors

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} &= \frac{p(n-1)!}{p!(n-p)!} + \frac{(n-p)(n-1)!}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{(n-1)! [p + (n-p)]}{p!(n-p)!} \\ &= \frac{n!}{p!(n-p)!} = \binom{n}{p} \end{aligned}$$

□

**Remarque 21.** — La deuxième formule nous permet d'obtenir tous les nombres combinatoires de proche en proche, dans le **Triangle de Pascal** :

$n \setminus p$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

**Proposition 9.** — Pour tout entier  $n$  strictement positif, et tout entier  $k$  avec  $1 \leq k \leq n$ , on a

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$$

*Démonstration.* On a, en effet :

$$n \binom{n-1}{k-1} = n \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}$$

soit

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k \times n!}{k \times (k-1)!(n-k)!} = k \frac{n!}{k!(n-k)!} = k \binom{n}{k}$$

□

**b) Formule du binôme de Newton**

Une autre formule est une relation importante qui servira avec les matrices, ainsi que les applications linéaires.

**Théorème 7.** — Pour tous nombres réels  $a$  et  $b$ , et pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a

$$(a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p} b^p + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

soit

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

*Démonstration.* Soit  $P_n$  la proposition “ $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$ ” définie pour tout entier  $n \geq 1$  (le résultat est également vrai pour  $n = 0$ ).

- Pour  $n = 1$  le résultat est vrai car  $(a + b)^1 = a + b = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b$ .
- Supposons la proposition  $P_n$  vraie pour un entier  $n \geq 1$ , et calculons  $(a + b)^{n+1}$  :

$$\begin{aligned} (a + b)^{n+1} &= (a + b)(a + b)^n \\ &= a(a + b)^n + b(a + b)^n \\ &= \binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n b + \dots + \binom{n}{p} a^{n-p+1} b^p + \dots + \binom{n}{n} a b^n \\ &\quad + \binom{n}{0} a^n b + \dots + \binom{n}{p-1} a^{n-p+1} b^p + \dots + \binom{n}{n-1} a b^n + \binom{n}{n} b^{n+1} \end{aligned}$$

Or pour tout entier  $1 \leq p \leq n$ , on a  $\binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p} = \binom{n}{p}$  (formule du triangle de Pascal), donc

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \dots + \binom{n+1}{p}a^{n-p+1}b^p + \dots + \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1}$$

ce qui donne le résultat annoncé, puisque  $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1$  et  $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$ .

□

**Exercice 10.** — Calculer

$$A_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \text{ et } B_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

*Solution.*

- Prenons  $a = b = 1$  et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$\text{Donc } A_n = (1+1)^n = 2^n.$$

- Prenons  $a = 2$  et  $b = 1$  et appliquons la formule du binôme de Newton :

$$(1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

$$\text{Donc } B_n = (1+2)^n = 3^n.$$

**Proposition 10.** — Pour tous réels  $a$  et  $b$ , et tout entier naturel  $n$ , on a

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a-b)(a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \dots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} + b^n) = (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k$$

*Solution.* Développons la somme, puis faisons un changement de variable :

$$\begin{aligned} (a-b) \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^k &= \sum_{k=0}^n a^{n+1-k} b^k - \sum_{k=0}^n a^{n-k} b^{k+1} \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n a^{n+1-k} b^k - \left( b^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k} b^{k+1} \right) \\ &= \underbrace{a^{n+1}}_{i=k-1} - b^{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} \cancel{a^{n-i} b^{i+1}} - \sum_{k=0}^{n-1} \cancel{a^{n-k} b^{k+1}} \end{aligned}$$

**Exemple 29.** — Ainsi,  $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ .

## VI. Applications

### 1) Définition

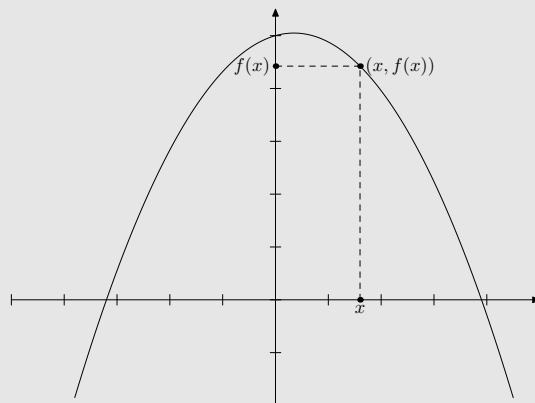
**Définition 18.** — Soient  $E$  et  $F$  deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**)  $f$  de  $E$  vers  $F$  est une transformation qui, à chaque élément  $x$  de  $E$ , associe un **unique** élément  $y$  de  $F$ . L'élément  $y$  de  $F$  est alors noté  $f(x)$  et est appelé **image** de  $x$  par  $f$ .  $x$  est alors un **antécédent** de  $y = f(x)$  par  $f$ . L'ensemble  $E$  est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

**Notation 2.** — On note  $f : E \rightarrow F$  pour signifier que  $f$  est une application de  $E$  vers  $F$ . L'ensemble des fonctions de  $E$  vers  $F$  est noté  $\mathcal{F}(E, F)$ .

**Exemple 30.** —  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x^2} \end{array} \right.$  et  $\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x+y}{1+x^2+y^2} \end{array} \right.$  sont des applications.

**Remarque 22.** — Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur  $\mathbb{R}^-$ . En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

**Définition 19.** — L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées  $(x, f(x))$  où  $x$  est un élément du domaine de définition de  $f$  est appelé **graphe** ou **courbe représentative** de la fonction  $f$ .



**Remarque 23.** — Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel  $f(x)$  existe.

**Exercice 11.** — Déterminer le domaine de définition de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4}$ .

*Solution.* La fonction  $f$  est définie si et seulement si  $x^2 - 4 \geq 0$ . Puisque  $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$ , et après tableau de signe rapide, on obtient  $\mathcal{D}_f = ]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$ .

## 2) Opérations sur les fonctions

**Définition 20.** — Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur le même ensemble  $E$ . Soit  $\lambda$  un réel.

- On appelle  $f + g$  la fonction définie sur  $E$  par  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ .
- On appelle  $f \times g$  la fonction définie sur  $E$  par  $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$ .
- On appelle  $\lambda f$  la fonction définie sur  $E$  par  $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$ .
- On appelle  $f + \lambda$  la fonction définie sur  $E$  par  $(f + \lambda)(x) = f(x) + \lambda$ .
- Si  $g$  **ne s'annule pas** sur  $E$ , on appelle  $\frac{f}{g}$  la fonction définie sur  $E$  par  $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ .

**Exemple 31.** — Soient  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  et  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^x + 1$ . Déterminer  $f + g$  et  $\frac{f}{g}$ .

*Solution.* Par définition,  $f + g$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $(f + g)(x) = x^2 + e^x + 1$  et  $\frac{f}{g}$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{e^x + 1}$ .

**Définition 21.** — Soit  $f$  une fonction définie sur  $E$  et prenant ses valeurs dans  $F$ .

Soit  $g$  une fonction définie sur  $F$  et à valeur dans  $G$ .

La fonction qui, à tout réel  $x$  de  $E$ , fait correspondre le réel  $g(f(x))$  est appelée **fonction composée** de  $f$  suivie de  $g$ . On a ainsi

$$\begin{array}{ccccc} E & \longrightarrow & F & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & f(x) & \longmapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée  $g \circ f$ .

**Exemple 32.** — Soit  $f: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{cases}$  et  $g: \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - 1 \end{cases}$ . Déterminer  $f \circ g$  et  $g \circ f$ .

*Solution.* On a, pour tout réel  $x$ ,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x - 1)^2$$

**Remarque 24.** — Dans le résultat précédent, on remarque que  $g \circ f \neq f \circ g$ . On dit que la composée n'est pas **commutative**.

### Méthode 5 :

Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

**Exemple 33.** — Soit  $f: x \longmapsto x^2 - 1$  et  $g: x \longmapsto \sqrt{x}$ . Déterminer  $g \circ f$ .



*Solution.*  $g \circ f(x)$  n'est définie que si  $f(x) \geq 0$  (car  $g$  est la fonction racine, définie sur  $\mathbb{R}^+$ ). Or

$$f(x) \geq 0 \iff x \in ]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$$

Ainsi,  $g \circ f$  est définie sur  $]-\infty, -1[ \cup ]1, +\infty[$  par  $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

**Remarque 25** (associativité). — Si  $f : E \rightarrow F$ ,  $g : F \rightarrow G$ ,  $h : G \rightarrow H$  sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

### 3) Injection, surjection

#### a) Injection

**Définition 22.** — On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est **injective** si  $f$  ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

**Remarque 26.** — On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

#### Méthode 6 :

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments  $x$  et  $x'$  de  $E$  vérifiant  $f(x) = f(x')$ . On montre alors que nécessairement  $x = x'$ .

**Exemple 34.** — Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = e^{x+1}$  est injective.

*Solution.* En effet, soient  $x, x' \in \mathbb{R}^2$  tels que  $f(x) = f(x')$ . On a donc  $e^{x+1} = e^{x'+1}$ , c'est-à-dire  $x+1 = x'+1$  en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien  $x = x'$ .

**Remarque 27.** —  $f : E \rightarrow F$  n'est pas injective si et seulement si

$$\exists (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

#### Méthode 7 :

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

**Exemple 35.** — Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2$  n'est pas injective.

*Solution.* En effet,  $1 \neq -1$  et pourtant  $1^2 = (-1)^2 = 1$ .

**Théorème 8.** — Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont deux applications injectives, alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est aussi injective.

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $x'$  deux éléments de  $E$  tels que  $g \circ f(x) = g \circ f(x')$ . Alors, puisque  $g(f(x)) = g(f(x'))$ , et comme  $g$  est injective, on a nécessairement  $f(x) = f(x')$ . Or,  $f$  est aussi injective : on a donc  $x = x'$ .  $g \circ f$  est bien injective.  $\square$

**Proposition 11.** — Une fonction  $f : E \rightarrow F$  strictement monotone est injective.

**Rappel 2.** — Une fonction  $f$  est strictement croissante si

$$\forall (x, y) \in E^2, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$$

On dispose également de la stricte décroissance.

*Démonstration.* Soient  $x$  et  $y$  deux éléments de  $E$  tels que  $x \neq y$ . Mais alors, on a soit  $x < y$  et dans ce cas  $f(x) < f(y)$ , soit  $x > y$  et alors  $f(x) > f(y)$ . Dans tous les cas  $f(x) \neq f(y)$ .  $\square$

## b) Surjection

**Définition 23.** — On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est **surjective** si tout élément de  $F$  possède au moins un antécédent par  $f$  dans  $E$  :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x)$$

### Méthode 8 :

Pour prouver qu'une fonction  $f$  est surjective, il suffit donc de trouver une solution  $x$  à l'équation  $f(x) = y$  pour tout élément  $y$  de  $F$ .

**Exemple 36.** — Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie pour tout  $x$  par  $f(x) = 2x - 1$  est surjective.

*Solution.* En effet, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ ,  $y = f(x) \iff x = \frac{y+1}{2}$ . Il existe donc au moins un antécédent à  $y$  par la fonction  $f$ .

### Méthode 9 :

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

**Exemple 37.** — Montrer que la fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = e^x$  n'est pas surjective.

*Solution.* Puisque, pour tout réel  $x$ ,  $e^x > 0$ , la valeur 0 n'est jamais atteinte par  $f$ . Ainsi,  $f$  n'est pas surjective.

**Remarque 28.** — On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Théorème 9.** — Si  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  sont deux applications surjectives, alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est aussi surjective.

*Démonstration.* Soit  $z$  un élément de  $G$ . Puisque  $g$  est surjective, il existe un élément  $y \in F$  tel que  $g(y) = z$ . De plus,  $f$  est surjective, donc il existe un élément  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$ . Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc  $x$  est un antécédent de  $z$  par la fonction  $g \circ f$ . □

### c) Bijection

**Définition 24.** — On dit qu'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est **bijjective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi,  $f$  est bijective si, et seulement si, chaque élément de  $F$  possède un **unique antécédent** par  $f$  dans  $E$  :

$$\forall y \in F, \quad \exists! x \in E, y = f(x)$$

#### Méthode 10 :

Pour démontrer qu'une fonction  $f : E \rightarrow F$  est bijective, il faut montrer que, pour tout  $y \in F$ , l'équation  $f(x) = y$  possède une **unique** solution dans  $E$ .

**Exemple 38.** — Montrer que la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x - 4$  est bijective.

*Solution.* En effet, pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a

$$f(x) = y \iff x - 4 = y \iff x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à  $y$  par  $f$ .

**Exemple 39.** — L'application  $\text{Id}_E : E \rightarrow E$  définie pour tout  $x$  de  $E$  par  $\text{Id}_E(x) = x$  est une bijection de  $E$  dans  $E$ .

**Théorème 10.** — Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction.  $f$  est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction  $g : F \rightarrow E$ , telle que  $f \circ g = \text{Id}_F$  et  $g \circ f = \text{Id}_E$ . La fonction  $g$  est appelée **fonction réciproque** de  $f$ , et est notée  $g = f^{-1}$ .

**Exemple 40.** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f : x \mapsto 2x - 1$ . Soit  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$ . Montrer que  $f$  et  $g$  sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

*Solution.* On constate que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f \circ g(x) = 2 \frac{x+1}{2} - 1 = x \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi,  $f$  est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction  $g$ .

### Méthode 11 :

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction  $f$ , on résout l'équation  $f(x) = y$  d'inconnue  $x$ . On obtiendra  $x = g(y)$  et  $g$  représente alors la fonction réciproque.

**Exemple 41.** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  la fonction définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = e^{x+1}$ . Déterminer  $f^{-1}$ .

*Solution.* Soit  $x \in \mathbb{R}$  et  $y \in \mathbb{R}_+^*$ . Alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$

qui a un sens car  $y > 0$ . Ainsi  $x = g(y)$  avec  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout réel  $x > 0$  par  $g(x) = \ln(x) - 1$ . Donc  $f^{-1} = g$ .

### Méthode 12 :

Lorsqu'on donne  $f$  et  $g$  et qu'on demande de montrer que  $g = f^{-1}$ , il suffit de montrer que  $f \circ g = Id$  et  $g \circ f = Id$ .

**Exemple 42.** — Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 4x - 2$ . Montrer que  $f^{-1}$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$ .

*Solution.* Notons  $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$ . Alors, pour tous réels  $x$  et  $y$ , on a

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y \quad \text{et} \quad g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$

Ainsi, on a bien  $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$  et  $g \circ f = Id_{\mathbb{R}} : g = f^{-1}$ .

**Théorème 11.** — Soient  $f : E \rightarrow F$  et  $g : F \rightarrow G$  deux fonctions bijectives. Alors  $g \circ f : E \rightarrow G$  est bijective, et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

*Démonstration.* En effet,

$$(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ g^{-1} \circ g \circ f = f^{-1} \circ Id_F \circ f = f^{-1} \circ f = Id_E$$

et

$$(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = g \circ f \circ f^{-1} \circ g^{-1} = g \circ Id_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = Id_G$$

D'après le théorème précédent,  $g \circ f$  est bijective, d'application réciproque  $f^{-1} \circ g^{-1}$ . □

#### 4) Image directe, image réciproque, restriction

**Définition 25.** — Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction.

- Si  $A \subset E$ , on appelle **image directe** de  $A$  par  $f$ , et on note  $f(A)$ , l'ensemble composé par les images par  $f$  des éléments de  $A$  :

$$f(A) = \{y \in F, \exists x \in A, f(x) = y\}$$

Dans le cas où  $A = E$ , on note  $\text{Im}(f) = f(E)$ .

- Si  $B \subset F$ , on appelle **image réciproque** de  $B$  par  $f$ , et on note  $f^{-1}(B)$ , l'ensemble composé par les antécédents par  $f$  des éléments de  $B$  :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E, f(x) \in B\}$$

**Exemple 43.** — Soit  $f : x \mapsto x + 2$ . Déterminer  $f([0; 1])$  et  $f^{-1}([0; 1])$ .

*Solution.* On a :

$$f([0; 1]) = [2; 3]$$

$$f^{-1}([0; 1]) = [-2; -1]$$

⚠ On ne confondra pas l'image réciproque d'un ensemble  $f^{-1}(B)$  et l'application réciproque d'une application  $f^{-1}$  lorsque celle-ci existe.

**Proposition 12.** — Soit  $f : E \rightarrow F$  une application.  $f$  est surjective si et seulement si  $f(E) = F$ .

*Démonstration.* Si  $f$  est surjective, tout élément de  $F$  admet au moins un antécédent dans  $E$ . Donc  $f(E) = F$ . Réciproquement, si  $f(E) = F$ , alors pour tout élément  $y \in F$ , il existe un  $x \in E$  tel que  $f(x) = y$  : par définition,  $f$  est surjective.  $\square$

**Définition 26.** — Soit  $f : E \rightarrow F$  une fonction, et  $G \subset E$ . On appelle **restriction** de  $f$  à  $G$ , et on note  $f|_G$  l'application définie sur  $G$  par

$$\forall x \in G, f|_G(x) = f(x)$$

**Exemple 44.** — Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout réel  $x$  par  $f(x) = x^2$ .  $f$  n'est pas injective. En revanche,  $f|_{\mathbb{R}^+}$  est injective.

## Exercices

### Réurrences

**Exercice 12.** — Démontrer par récurrence les résultats suivants :

- $\forall n \geq 1, 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

*Solution.* Soit  $P_n$  la propriété “ $1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ” définie pour tout entier  $n \geq 1$ , et montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

- **Initialisation** : Pour  $n = 1$ , la somme vaut  $1^3 = 1$  et

$$\left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2 = 1^2 = 1$$

La propriété  $P_1$  est donc vraie.

- **Hérédité** : supposons la propriété  $P_n$  vraie pour un certain  $n \geq 1$ , et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie. On sait donc que

$$1^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

donc

$$1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$$

Or

$$\begin{aligned} \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + (n+1)\right) \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4}\right) \\ &= (n+1)^2 \left(\frac{n+2}{2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$1^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2$$

La propriété  $P_{n+1}$  est donc vraie.

**Bilan** : d’après le principe de récurrence, la propriété  $P_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

- (♥) Si  $a$  est un réel fixé  $a \geq -1$ ,

$$\forall n, (1+a)^n \geq 1+na \quad (\text{inégalité de Bernoulli})$$

*Solution.* L’inégalité de Bernoulli nous sera utile plus tard. Elle est donc à retenir.

Soit  $P_n$  la propriété “ $(1+a)^n \geq 1+na$ ” définie pour tout entier  $n \geq 0$ . Montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- **Initialisation** : Pour  $n = 0$ , on a  $(1 + a)^0 = 1$  et  $1 + 0 \times a = 1$ . Ainsi,  $(1 + a)^0 \geq 1 + 0 \times a$ . La propriété  $P_0$  est donc vraie.

- **Hérédité** : supposons la propriété  $P_n$  vraie pour un certain  $n$ , et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie. On sait donc que

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

En multipliant par  $(1 + a) > 0$  par hypothèse, on a

$$(1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na)$$

soit

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2$$

Or  $na^2 \geq 0$ , donc

$$(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a + na^2 \geq 1 + (n + 1)a$$

La propriété  $P_{n+1}$  est donc vraie.

**Bilan** : d'après le principe de récurrence, la propriété  $P_n$  est vraie pour tout  $n$ .

- Si  $u$  est la suite définie par  $u_0 = 7$  et pour tout entier  $n$ ,  $u_{n+1} = 2u_n - 3$ , alors

$$\forall n, u_n = 2^{n+2} + 3$$

*Solution.* Soit  $P_n$  la propriété " $u_n = 2^{n+2} + 3$ " définie pour tout entier  $n \geq 0$ . Montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- **Initialisation** : pour  $n = 0$ ,  $u_0 = 7$  et  $2^{0+2} + 3 = 2^2 + 3 = 7$ . La propriété  $P_0$  est donc vraie.

- **Hérédité** : supposons la propriété  $P_n$  vraie pour un certain  $n$ , et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie. On sait donc que

$$u_n = 2^{n+2} + 3$$

Or, par définition,  $u_{n+1} = 2u_n - 3$ . Donc, par hypothèse de récurrence (H.R.) :

$$u_{n+1} = 2 \left( \underbrace{2^{n+2} + 3}_{\text{H.R.}} \right) - 3 = 2 \times 2^{n+2} + 6 - 3 = 2^{n+3} + 3 = 2^{(n+1)+2} + 3$$

La propriété  $P_{n+1}$  est donc vraie.

**Bilan** : d'après le principe de récurrence, la propriété  $P_n$  est vraie pour tout  $n$ .

- Si  $q \neq 1$ , alors

$$\forall n, 1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

*Solution.* Cette démonstration peut se faire sans récurrence, en calculant  $(1 - q)(1 + q + \dots + q^n)$ .

Soit  $P_n$  la propriété " $1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ " définie pour tout entier  $n \geq 0$ . Montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

- **Initialisation** : pour  $n = 0$ , la somme est réduite à  $q^0 = 1$  et  $\frac{1 - q^1}{1 - q} = 1$ . La propriété  $P_0$  est donc vraie.

- **Hérédité** : supposons la propriété  $P_n$  vraie pour un certain  $n$ , et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie. On sait donc que

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Donc

$$1 + q + \dots + q^n + q^{n+1} = \underbrace{\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}}_{\text{H.R.}} + q^{n+1} = \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q} = \frac{1 - q^{(n+1)+1}}{1 - q}$$

La propriété  $P_{n+1}$  est donc vraie.

**Bilan** : d'après le principe de récurrence, la propriété  $P_n$  est vraie pour tout  $n$ .

- $\forall n \geq 1, 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$

*Solution.* Soit  $P_n$  la propriété " $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$ " définie pour tout entier  $n \geq 1$ . Montrons par récurrence que  $P_n$  est vraie pour tout entier naturel  $n \geq 1$ .

- **Initialisation** : pour  $n = 1$ , la somme est réduite à 1 et  $1^2 = 1$ .  
La propriété  $P_1$  est donc vraie.
- **Hérédité** : supposons la propriété  $P_n$  vraie pour un certain  $n \geq 1$ , et montrons que  $P_{n+1}$  est vraie.  
On sait donc que

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Donc,

$$1 + 3 + \dots + (2n - 1) + (2n + 1) = \underbrace{n^2}_{\text{H.R.}} + (2n + 1) = (n + 1)^2$$

La propriété  $P_{n+1}$  est donc vraie.

**Bilan** : d'après le principe de récurrence, la propriété  $P_n$  est vraie pour tout  $n \geq 1$ .

## Ensemble

**Exercice 13.** — Soient les ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, B = \{1, 3, 5, 7\}, C = \{2, 4, 6\}, D = \{3, 6\}$$

Déterminer  $B \cap D, C \cap D, B \cup C, B \cup D$ . Déterminer les complémentaires dans  $A$  de  $B, C$  et  $D$ .

*Solution.* Exercice rapide pour bien maîtriser les différents concepts. On obtient :

$$B \cap D = \{3\}, C \cap D = \{6\}, B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = A, B \cup D = \{1, 3, 5, 6, 7\}$$

Enfin, dans  $A$ , on a :

$$\overline{B} = \{2, 4, 6\} = C, \overline{C} = \{1, 3, 5, 7\} = B, \overline{D} = \{1, 2, 4, 5, 7\}$$

**Exercice 14** (Lois de de Morgan et distributivités). — Soient  $E$  un ensemble, et  $A, B$  et  $C$  des sous-ensembles de  $E$ . Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .



*Solution.* On raisonne par double inclusion : si  $A \subset B$  et  $B \subset A$  alors  $A = B$ .

- $[\Leftarrow]$  : si  $x \in \overline{A \cup B}$ , cela veut dire que  $x$  n'est pas dans  $A \cup B$ , dont il n'est ni dans  $A$ , ni dans  $B$ . Il est ainsi dans  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  : donc  $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ .  
 $[\Rightarrow]$  : si  $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$ , cela veut dire que  $x$  n'est pas dans  $A$  et  $x$  n'est pas dans  $B$ . Il n'est donc ni dans  $A$ , ni dans  $B$ , donc pas dans  $A \cup B$ . Ainsi,  $x \in \overline{A \cup B}$
- $[\Leftarrow]$  : si  $x \in \overline{A \cap B}$ , cela veut dire que  $x$  n'est pas dans  $A \cap B$ , donc il n'est pas dans  $A$ , ou pas dans  $B$ . Donc il est dans  $\overline{A}$  ou dans  $\overline{B}$  : donc  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ .  
 $[\Rightarrow]$  : si  $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ , cela veut dire que  $x$  est dans  $\overline{A}$  ou dans  $\overline{B}$ . Ainsi, il n'est pas dans  $A$  ou pas dans  $B$ . Dans tous les cas, il n'est pas dans  $A \cap B$  :  $x \in \overline{A \cap B}$ .
- $[\Leftarrow]$  : si  $x \in A \cup (B \cap C)$ , cela veut dire que  $x$  est dans  $A$ , ou dans  $B \cap C$ , donc dans  $A$  ou dans  $B$  et  $C$ . Dans tous les cas, il est dans  $A \cup B$  et dans  $A \cup C$  :  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ .  
 $[\Rightarrow]$  : si  $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ , cela veut dire que  $x$  est dans  $A \cup B$  et dans  $A \cup C$ . Donc  $x$  est dans  $A$ , ou alors il est dans  $B$  et  $C$ , donc dans  $A$  ou dans  $B \cap C$  :  $x \in A \cup (B \cap C)$ .
- $[\Leftarrow]$  : si  $x \in A \cap (B \cup C)$ , cela veut dire que  $x$  est dans  $A$  et dans  $B \cup C$ , donc dans  $A$  et dans  $B$  ou  $C$ . Donc  $x$  est dans  $A$  et  $B$ , ou dans  $A$  et  $C$  :  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ .  
 $[\Rightarrow]$  : si  $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ , cela veut dire que  $x$  est dans  $A \cap B$  ou dans  $A \cap C$ , donc dans  $A$  et  $B$ , ou dans  $A$  et  $C$ . Dans tous les cas,  $x$  est dans  $A$  et dans  $B$  ou  $C$  :  $x \in A \cap (B \cup C)$ .

**Exercice 15.** — Déterminer les éléments de  $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$

*Solution.* On doit déterminer tous les sous-ensembles de  $\{0, 1, 2\}$  :

- à 0 élément, il n'y a que  $\emptyset$ .
- à 1 éléments, il y a  $\{0\}$ ,  $\{1\}$  et  $\{2\}$ .
- à 2 éléments, il y a  $\{0, 1\}$ ,  $\{0, 2\}$  et  $\{1, 2\}$ .
- à 3 éléments, il n'y a que  $\{0, 1, 2\}$ .

Ainsi,

$$\mathcal{P}(\{0, 1, 2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}$$

On obtient bien  $2^3 = 8$  sous ensembles.

## Dénombrement

**Exercice 16.** — On possède un jeu de 32 cartes. On note  $A$  l'ensemble "les deux cartes tirées sont rouges",  $B$  l'ensemble "les deux cartes tirées sont un valet et un dix" et  $C$  l'ensemble "les deux cartes tirées sont un personnage".

Que représente  $\overline{A}$ ,  $A \cap B \cap \overline{C}$  et  $(A \cap B) \cap C$ ?

Ecrire à l'aide des ensembles  $A$ ,  $B$  et  $C$  les ensembles  $F$  : "les deux cartes tirées sont des personnages et ne sont pas toutes les deux rouges", et  $G$  : "on obtient au plus un personnage rouge".

*Solution.* En français,  $\overline{A}$  représente l'ensemble "au moins une des deux cartes n'est pas rouge",  $A \cap B \cap \overline{C}$  représente l'ensemble "les deux cartes sont rouges, sont un valet et un dix et au moins un des deux n'est pas un personnage", ce qui se simplifie en "les deux cartes sont un valet rouge et un dix rouge". Enfin  $A \cap B \cap C$  est l'ensemble vide : en effet, il est impossible que les deux cartes soient un valet et un dix, et en même temps, deux personnages.

À l'aide des ensembles A, B et C, on a

$$F = C \cap \bar{A} \text{ et } G = \underbrace{(A \cap \bar{C})}_{\substack{\text{si les deux sont} \\ \text{rouges, on a au plus} \\ \text{un personnage}}} \cup \bar{A} = \bar{A} \cup \bar{C}$$

**Exercice 17.** — Parmi 40 étudiants, 8 connaissent le portugais, 15 le chinois, et 9 le russe. D'autres part, 4 parlent chinois et russe, 5 chinois et portugais, 2 russe et portugais et 2 parlent les 3 langues. Combien d'étudiants ne connaissent aucune de ces trois langues?

*Solution.* Notons P l'ensemble des élèves parlant portugais, C ceux parlant chinois, et R ceux parlant russe. Notons A l'ensemble des élèves ne parlant aucune des trois langues. Alors  $\bar{A}$  désigne l'ensemble des élèves parlant au moins une langue. Ainsi

$$\bar{A} = P \cup C \cup R$$

Par la formule du crible de Poincaré, on a

$$\text{card}(\bar{A}) = \text{card}(P) + \text{card}(C) + \text{card}(R) - \text{card}(P \cap C) - \text{card}(P \cap R) - \text{card}(R \cap C) + \text{card}(P \cap C \cap R)$$

soit, d'après l'énoncé

$$\text{card}(\bar{A}) = 8 + 15 + 9 - 5 - 2 - 4 + 2 = 23$$

Il y a donc  $40 - 23 = 17$  élèves ne parlant aucune langue.

**Exercice 18.** — Au menu d'un restaurant, il y a 3 entrées 2 plats et 4 desserts possibles. Combien de menus (une entrée, un plat, un dessert) sont possibles?

*Solution.* Pour composer un menu, il faut choisir une entrée parmi les 3, un plat parmi les 2 et un dessert parmi les 4. Il y a donc

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times \binom{4}{1} = 3 \times 2 \times 4 = 24 \text{ menus possibles.}$$

**Exercice 19.** — Un anagramme est un mot (ou une succession de lettres) formés des mêmes lettres, dans un ordre différent. Combien d'anagrammes peut on former avec le mot GLACE? le mot ELEVE?

*Solution.* GLACE est composé de 5 lettres distinctes. Il faut placer 5 lettres distinctes à 5 places : il y a donc  $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5! = 120$  anagrammes possibles.

Pour le mot ELEVE, il y a 3 lettres E et 2 autres lettres. On place d'abord les 3 lettres sur 5 places possibles. Il reste alors 2 lettres à poser dans les 2 places restantes. Cela donne donc

$$\binom{5}{3} \times 2 = 20 \text{ anagrammes possibles.}$$

**Exercice 20.** — Calculer

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

*Solution.* Dans tous les cas, on utilise la formule du binôme de Newton avec des réels bien choisis :

$$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$$

$$1 = 1^n = ((1-x) + x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-x)^{n-k} x^k$$

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k$$

$$3^n = (1+2)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 2^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$$

**Exercice 21** (★). — On considère une classe de 25 élèves. On suppose qu’aucun élève n’est né un 29 février et que, pour chaque élève, tous les autres jours de l’année ont la même probabilité d’être le jour de son anniversaire. Quelle est la probabilité qu’au moins deux élèves soient nés le même jour ?

*Solution.* Pour simplifier, on note de 1 à 365 les jours. On note A l’événement “au moins deux élèves sont nés le même jour”. On va déterminer  $\mathbb{P}(\bar{A})$ .  $\bar{A}$  est donc l’événement “les élèves sont tous nés des jours différents”.

L’univers  $\Omega$  qui nous intéresse est constitué de l’ensemble des 25 jours de naissances des élèves. On a

$$\text{card}(\Omega) = 365^{25}$$

L’événement  $\bar{A}$  est constitué des listes de 25 jours deux à deux distincts. Par définition,

$$\text{card}(\bar{A}) = A_{365}^{25}$$

Donc

$$\mathbb{P}(\bar{A}) = \frac{A_{365}^{25}}{365^{25}}$$

On trouve  $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(\bar{A}) \approx 0,568699704$ .

**Remarque :** ce résultat est appelé *paradoxe des anniversaires*. A partir de 23 élèves, la probabilité qu’au moins deux élèves soient nés le même jour est supérieure à  $\frac{1}{2}$ , ce qui est contre l’intuition. A partir de 57 élèves, cette probabilité est supérieure à 0,99.

## Fonctions

**Exercice 22.** — Montrer les résultats suivants :

$$\forall x > 0, \quad \sqrt{\frac{2}{x+1}} \geq \sqrt{\frac{2}{x+4}} \quad \forall x, \quad e^{2x+1} \leq e^{x^2+2}$$

*Solution.*

1. Pour  $x > 0$ , on a  $x + 1 < x + 4$ . Par décroissance de la fonction inverse sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a

$$\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+4}$$

soit

$$\frac{2}{x+1} \geq \frac{2}{x+4}$$

Enfin, par stricte croissance de la fonction racine sur  $\mathbb{R}^+$  :

$$\sqrt{\frac{2}{x+1}} \geq \sqrt{\frac{2}{x+4}}$$

2. Calculons

$$\frac{e^{x^2+2}}{e^{2x+1}} = e^{x^2+2-2x-1} = e^{x^2-2x+1}$$

Or, pour tout réel  $x$ ,  $x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 \geq 0$ . Donc, par croissance de la fonction exponentielle sur  $\mathbb{R}$ ,

$$e^{x^2-2x+1} \geq e^0 = 1$$

Ainsi,

$$\frac{e^{x^2+2}}{e^{2x+1}} \geq 1$$

Enfin, puisque  $e^{2x+1} > 0$ , on en déduit bien

$$e^{x^2+2} \geq e^{2x+1}$$

**Exercice 23.** — On considère les fonctions  $f : x \mapsto x^2$ ,  $g : x \mapsto \sqrt{x}$  et  $h : x \mapsto x - 2$ . Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :

$$f \circ g, f \circ h, g \circ h, h \circ f, h \circ g, g \circ f$$

*Solution.* Remarquons tout d'abord que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ ,  $g$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$  et  $h$  est définie sur  $\mathbb{R}$ . De plus,  $f$  est toujours positive, et  $h$  est positive sur  $[2, +\infty[$ . Ainsi :

- $f \circ g$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ , et pour tout  $x \geq 0$ ,  $f \circ g(x) = (\sqrt{x})^2 = x$ .
- $f \circ h$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f \circ h(x) = (x - 2)^2$ .
- $g \circ h$  est définie sur  $[2, +\infty[$ , et pour tout  $x \geq 2$ ,  $g \circ h(x) = \sqrt{x - 2}$ .
- $h \circ f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h \circ f(x) = x^2 - 2$ .
- $h \circ g$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$ , et pour tout  $x \geq 0$ ,  $h \circ g(x) = \sqrt{x} - 2$ .
- $g \circ f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g \circ f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ .

**Exercice 24.** — Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$  et  $g : x \mapsto e^{-x^2}$ . Déterminer quatre fonctions  $u, v, w$ , et  $z$  telles que  $f = u \circ v$  et  $g = w \circ z$ .

*Solution.* On peut écrire  $f$  sous la forme  $\frac{1}{v}$  avec  $v : x \mapsto x^2 + 1$ . Ainsi,  $f = u \circ v$  avec  $u : x \mapsto \frac{1}{x}$  et  $v : x \mapsto x^2 + 1$ .

De même,  $g$  s'écrit  $e^z$  avec  $z : x \mapsto -x^2$ . Ainsi,  $g = w \circ z$  avec  $w : x \mapsto e^x$  et  $z : x \mapsto -x^2$ .

**Exercice 25.** — Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 + 1$ .
- $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  définie pour tout  $x > 0$  par

$$g(x) = e^{3+\ln(x)}$$

- $h : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}^*$  définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par  $h(x) = \frac{1}{x^3+1}$

*Solution.*

- **Injectivité.** *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est injective, on écrit  $f(x) = f(x')$  et on essaie de montrer que  $x = x'$ . Pour montrer qu'elle n'est pas injective, on exhibe un contre-exemple.*

$f$  n'est pas injective sur  $\mathbb{R}$ . En effet,  $-1 \neq 1$  et pourtant  $f(-1) = f(1) = 2$ .

$g$  est injective sur  $\mathbb{R}_+^*$ . En effet, soient  $x$  et  $x'$  deux réels strictement positifs. Alors

$$g(x) = g(x') \Leftrightarrow e^{3+\ln(x)} = e^{3+\ln(x')} \Leftrightarrow 3 + \ln(x) = 3 + \ln(x') \text{ car exp est strictement croissante sur } \mathbb{R}.$$

Ainsi,  $\ln(x) = \ln(x')$  puis  $x = x'$  car la fonction  $\ln$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

$h$  est injective sur  $\mathbb{R}$ . En effet, soient  $x$  et  $x'$  deux réels. Alors

$$h(x) = h(x') \Leftrightarrow \frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{x'^3+1} \Leftrightarrow x^3+1 = x'^3+1 \text{ en appliquant la fonction inverse}$$

donc  $x^3 = x'^3$  puis  $x = x'$  car la fonction cube est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .

- **Surjectivité.** *Rappel de la méthode : pour montrer qu'une fonction est surjective sur un ensemble, on prend  $y$  un élément de cet ensemble, et on lui cherche au moins un antécédent. Pour montrer qu'elle n'est pas surjective, on exhibe un élément  $y$  de cet ensemble qui n'est pas atteint par la fonction.*

$f$  n'est pas surjective. En effet, pour tout réel  $x$ ,  $x^2 + 1 \geq 1$ , donc (par exemple) 0 n'est jamais atteint par la fonction  $f$ . *En revanche, elle est surjective sur  $[1; +\infty[$ .*

$g$  n'est pas surjective. En effet, pour tout réel  $x > 0$ ,  $g(x) > 0$  (car une exponentielle est toujours positive), donc (par exemple)  $-1$  n'est jamais atteint par la fonction  $g$ . *En revanche, elle est surjective sur  $]0; +\infty[$ .*

$h$  est surjective. En effet, soit  $y \in \mathbb{R}^*$ . Alors  $h(x) = y$  nous donne  $\frac{1}{x^3+1} = y$  puis  $x^3 = \frac{1}{y} - 1$  ( $y \neq 0$ ) et enfin  $x = \sqrt[3]{\frac{1}{y} - 1}$  (fonction qui est bien définie sur  $\mathbb{R}$ ).

- **Bijektivité.**  $f$  n'étant pas injective, elle n'est a fortiori pas bijective. De même,  $g$  n'étant pas surjective, elle n'est pas bijective. Enfin,  $h$  étant à la fois injective et surjective, elle est bijective.

**Exercice 26.** — Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f : x \mapsto e^{x+1}$ .

Déterminer l'image directe par  $f$  de  $[0; 1]$ . Déterminer l'image réciproque par  $f$  de  $\mathbb{R}^+$  et de  $[1; e]$ .

*Solution.* Pour tout  $x$  dans  $[0; 1]$ ,  $x + 1$  parcourt  $[1; 2]$ . Par stricte croissance de  $\exp$ ,  $e^{x+1}$  parcourt alors  $[e^1; e^2]$ . Donc

$$f([0; 1]) = [e; e^2]$$

Enfin  $e^{x+1}$  est dans  $[1; e]$  si et seulement si  $x + 1$  est dans  $[\ln(1); \ln(e)] = [0; 1]$ , et donc si  $x \in [-1; 0]$  :

$$f^{-1}([1; e]) = [-1; 0]$$