CHAPITRE 2

ÉTUDE D'UNE FONCTION D'UNE VARIABLE RÉELLE

Dans ce chapitre, on rappelle certaines généralités sur les fonctions, et on ajoute certains compléments permettant d'étudier les fonctions (parité, périodicité) ainsi que de nouvelles fonctions (valeur absolue, partie entière, trigonométrique et réciproque, hyperbolique). On revient également sur la trigonométrie.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① savoir déterminer certaines caractéristiques d'une fonction :

- parité et périodicité ☐
- les extrema d'une fonction ☐

② savoir déterminer les limites de fonctions :

- par opérations usuelles, par composées ☐
- en lien avec le taux d'accroissement ☐

③ savoir maîtriser les dérivées et primitives :

- connaître dérivées usuelles et formules de dérivations ☐
- étudier les variations d'une fonction avec la dérivée ☐
- utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour montrer l'existence de solutions à des équations ☐
- savoir déterminer des primitives de fonctions ☐

④ connaître les fonctions usuelles (variations, dérivées, limites, représentation graphique) :

- fonctions affines et trinômes du second degré ☐
- fonctions valeur absolue, racine carrée et inverse ☐
- fonction partie entière ☐
- fonctions ln, exp et puissances ☐
- fonctions trigonométriques (cos, sin, tan) ☐
- fonctions trigonométriques réciproques (arccos, arcsin, arctan) ☐
- fonctions hyperboliques (ch, sh, th) ☐

⑤ savoir étudier complètement une fonction ☐

I. Généralités sur les fonctions

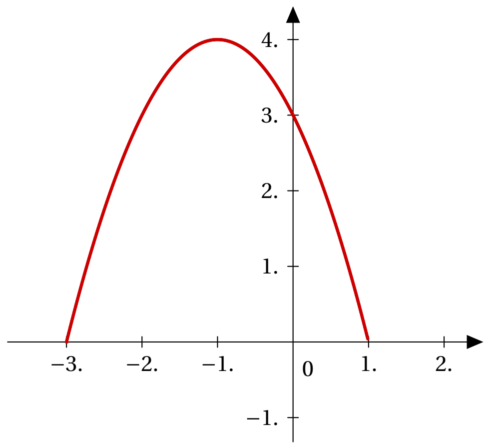
1) Notion de fonction

Définition 1. — On appelle **fonction** f, définie sur un domaine I, un objet qui, à partir d'un nombre x de I donné, associe **une unique image** noté $f(x)$.

On note $x \longmapsto f(x)$ pour dire "à x, on associe le nombre $f(x)$".

Exemple 1. —

- Fonction définie graphiquement :



- Fonction définie par une formule : $g(x) = 3x^2 + 1$
- Fonction définie par un tableau :

x	-2	-1	0	1	2
$h(x)$	1	-3	2	$\frac{1}{2}$	0

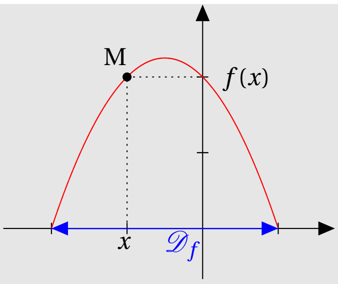
Définition 2. — On appelle **ensemble de définition** d'une fonction f, noté $\mathscr{D}_f$ en général, l'ensemble de tous les réels x où on peut calculer $f(x)$ (c'est à dire, où $f(x)$ est définie).

Exemple 2. — Dans les exemples précédents :

- f est définie graphiquement sur $[-3;1]$: en effet, on ne peut calculer $f(x)$ que si $-3 \leqslant x \leqslant 1$.
- g est définie sur $\mathbb{R}$: en effet, pour tout nombre réel x, on peut calculer $3x^2 + 1$, et donc $g(x)$.
- h est définie sur $\{-2;-1;0;1;2\}$.

2) Courbe représentative

Définition 3. — Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}_f$. Soit $(O;I;J)$ un repère (en général orthonormé) du plan. Le **graphe** (ou **courbe représentative**) de f, notée $\mathscr{C}_f$, est l'ensemble des points $(x; f(x))$ où x décrit l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f.



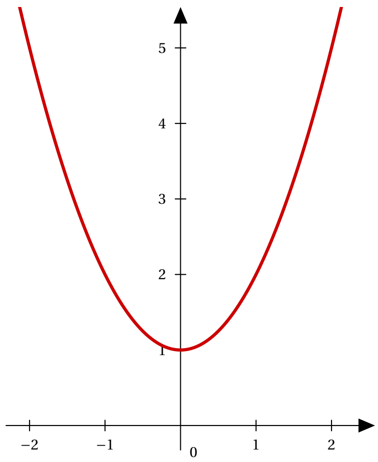
3) Parité et imparité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Définition 4. — f est dite **paire** si

- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = f(x)$

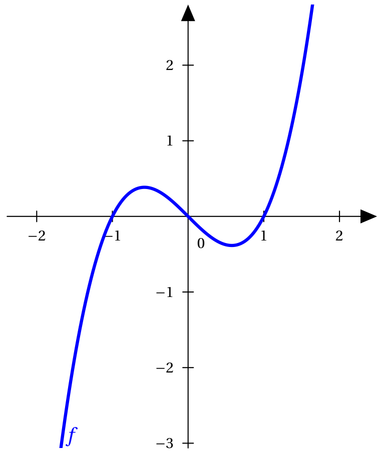
Remarque 1. — f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



Définition 5. — f est dite **impaire** si

- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad -x \in \mathscr{D}_f$ (le domaine de définition est symétrique par rapport à 0).
- $\forall\ x \in \mathscr{D}_f, \quad f(-x) = -f(x)$

Remarque 2. — f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine.



Exemple 3. — La fonction carrée $f : x \longmapsto x^2$ est une fonction paire; la fonction inverse $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est une fonction impaire. En effet, elles sont définies sur des domaines symétriques par rapport à 0, et

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad (-x)^2 = x^2 \quad \text{et} \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x}$$

Méthode 1 :
Pour déterminer la parité d'une fonction, on procède en deux étapes :

- On vérifie que le domaine est bien symétrique par rapport à 0.
- Pour un certain x dans $\mathscr{D}_f$ on calcule $f(-x)$ et on essaie de retrouver $f(x)$ ou $-f(x)$.

Exemple 4. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Déterminer la parité de f.

Solution. Le domaine de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est bien symétrique par rapport à 0. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a alors

$$f(-x) = e^{-(-x)^2} = e^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire.

Méthode 2 :
Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire, ni impaire, on exhibe un contre-exemple : on cherche deux réels x et y dans $\mathscr{D}_f$ tels que $f(-x) \neq f(x)$ et $f(-y) \neq -f(y)$ (selon le cas, cela peut être le même réel)

Exemple 5. — Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout réel x par $f(x) = x^2 + x$ n'est ni paire, ni impaire.

Solution. En effet, on constate que, pour $x = 1$, on a

$$f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$$

alors que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$. Donc $f(-1) \neq f(1)$ et $f(-1) \neq -f(1)$: la fonction n'est ni paire, ni impaire.

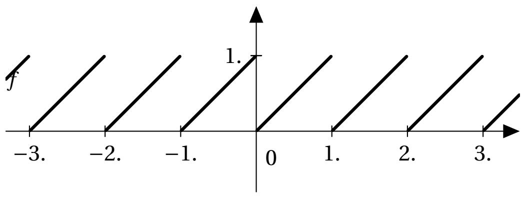
4) Périodicité

Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$.

Définition 6. — On dit que f est **périodique** de période $\mathrm{T} > 0$ si :

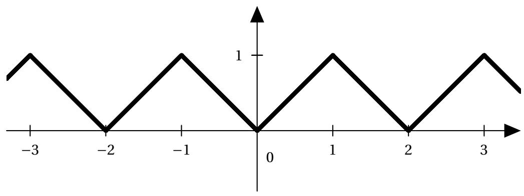
- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad x + \mathrm{T} \in \mathscr{D}_f$
- $\forall\, x \in \mathscr{D}_f, \quad f(x + \mathrm{T}) = f(x)$

Remarque 3. — La courbe représentative d'une fonction périodique n'est donc qu'une répétition de sa représentation sur $[0;\mathrm{T}]$. La fonction suivante est périodique, de période 1 :



Exercice 1. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, paire et périodique de période 2, définie pour tout $x \in [0;1]$ par $f(x) = 1 - x$. Représenter f.

Solution. La fonction étant paire, on la représente sur $[0;1]$ puis par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, sur $[-1;1]$. On obtient ainsi la courbe représentative sur une période, qu'il suffit de répéter. On obtient la courbe représentative suivante :



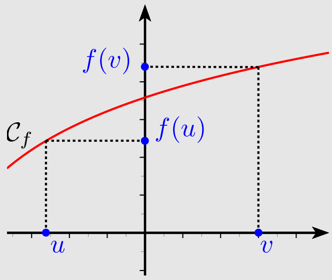
5) Sens de variation

Définition 7. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, de courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère.

On dit que f est **croissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \leqslant f(v)$$

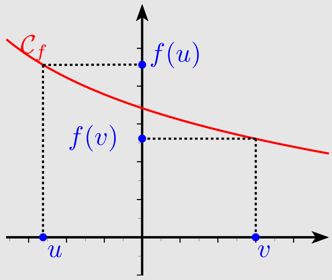
Une fonction croissante conserve l'ordre



On dit que f est **décroissante** sur I si, pour tous nombres réels u et v de l'intervalle I on a

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) \geqslant f(v)$$

Une fonction décroissante change l'ordre



Remarque 4. — On définit également la croissance stricte et la décroissance stricte. Une fonction f définie sur un intervalle I est dite **strictement croissante** lorsque pour tout u, v de l'intervalle I

$$\text{Si } u < v \text{ alors } f(u) < f(v)$$

Propriété 1. —

- *La somme de deux fonctions croissantes (resp. décroissante) est croissante (resp. décroissante).*
- *La composée de deux fonctions ayant le même sens de variation est croissante.*
- *La composée de deux fonctions ayant des sens de variations contraires est décroissante.*

Démonstration.

- Soit $x < y$. Si f et g sont croissantes, alors $f(x) \leqslant f(y)$ et $g(x) \leqslant g(y)$. En additionnant les inégalités, $f(x) + g(x) \leqslant f(y) + g(y)$: $f + g$ est bien croissante.
- Soit $x < y$ et f, g deux fonctions croissantes. Alors $f(x) \leqslant f(y)$. Puisque g est croissante, on a également $g(f(x)) \leqslant g(f(y))$: $g \circ f$ est bien croissante.

Les autres inégalités se démontrent de la même manière. □

Théorème 1. — *Soit* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application strictement monotone. Alors* f *est bijective de* I *sur* $f(\mathrm{I})$.

Démonstration. f est par définition surjective sur $f(\mathrm{I})$. Enfin, si $x \neq x'$, $f(x) \neq f(x')$ car la fonction f est strictement monotone : donc f est injective, et donc bijective. □

6) Majorant-Minorant

Définition 8. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

- f est dite **majorée** sur I s'il existe un réel M tel que,

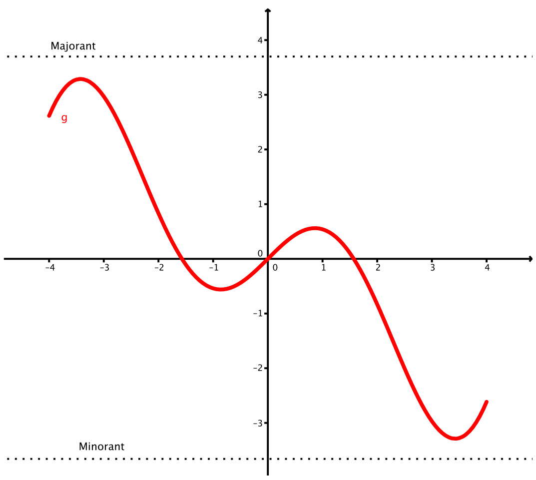
$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \leqslant \mathrm{M}$$

M est appelé un **majorant** de f sur I.

- f est dite **minorée** sur I s'il existe un réel m tel que,

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x) \geqslant m$$

  m est appelé un **minorant** de f sur I.
- f est dite **bornée** sur I si elle est à la fois majorée et minorée.



Remarque 5. — Une fonction f est bornée si et seulement si $|f|$ est bornée. Ainsi, pour borner f, il peut souvent être judicieux de borner $|f|$.

Exemple 6. — Soit $f : x \longmapsto 2\sin(x^2+1)$. Alors, pour tout réel x, $|f(x)| \leqslant 2$. Ainsi, f est bornée.

7) Maximum-Minimum

Définition 9. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Soit a un nombre réel de l'intervalle I.

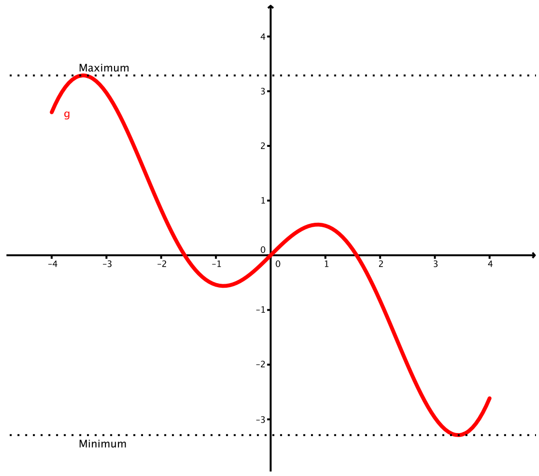
- On dit que f admet un **maximum** en a si, pour tout réel x de I, on

$$f(x) \leqslant f(a)$$

  On note $\max\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x) = f(a)$.
- On dit que f admet un **minimum** en a si, pour tout réel x de I, on

$$f(x) \geqslant f(a)$$

  On note $\min\limits_{x\in\mathrm{I}} f(x) = f(a)$.



Remarque 6. — On dit que $f(a)$ est un **extremum** de f sur I si $f(a)$ est un minimum ou un maximum de f sur I.
Si $f(a)$ est un extremum sur un intervalle ouvert contenant a, mais pas sur I tout entier, on dit que $f(a)$ est un **extremum local** en a.

II. Limites

L'ensemble des éléments dans cette section sera revu dans l'année, de manière plus détaillée. Il s'agit ici de faire des rappels des années précédentes, dans le but de pouvoir faire des études fonctions.

1) Opérations sur les limites

Rappelons les résultats vu dans les classes précédentes. On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a) Limite de $f+g$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 7. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}) = +\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}) = +\infty$.

b) Limite de $f\times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l.l'$	signe$(l').\infty$	-signe$(l').\infty$
$+\infty$	signe$(l).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe$(l).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 7. — Si $l = 0$ (et/ou $l' = 0$), seul le résultat $\lim(fg) = l.l' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0 \times \infty$") sont **indéterminées**.

Exemple 8. —

$$\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} 3xe^x = 0$$

Solution. En effet, $\lim_{x\to+\infty} x = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim_{x\to+\infty} (x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$. Par produit, $\lim_{x\to 0} 3xe^x = 0$.

c) Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{l}{l'}$	signe$(l').\infty$	-signe$(l').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(l).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(l).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 9. —

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Solution. En effet, $\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.
De même, $\lim_{x\to 0^+} x^2 + 1 = 1$ par somme et $\lim_{x\to 0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$.

2) Limite d'une fonction composée

Théorème 2. — *Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$.*
Si $\lim_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Démonstration. Admis. □

Méthode 3 :
Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.
- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 10. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1}$.

Solution.

- On pose $X = x^2 - x + 1$. On a
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$
- On a
$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc
$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

Exercice 2. — Montrer que $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \dfrac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

Solution. Posons $X = 3x - 1$. Alors :

- On a $\lim\limits_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x - 1 = 0^+$.
- De plus, $\lim\limits_{X\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

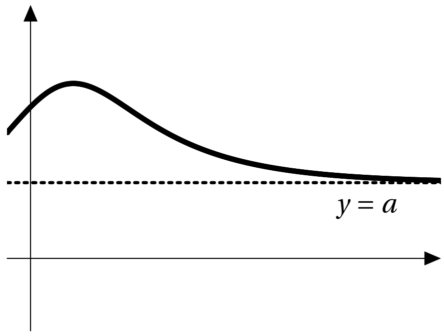
Par composée,
$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

3) Limites et asymptotes

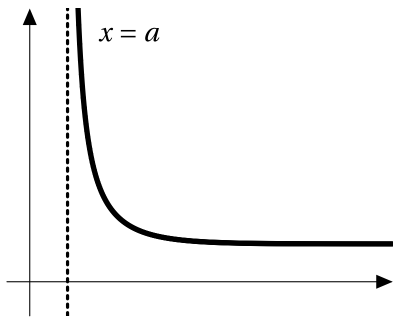
Les asymptotes sont très utiles pour pouvoir tracer au mieux l'allure de la courbe d'une fonction.

Définition 10. — Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ (ou sur un intervalle de $\mathbb{R}$).

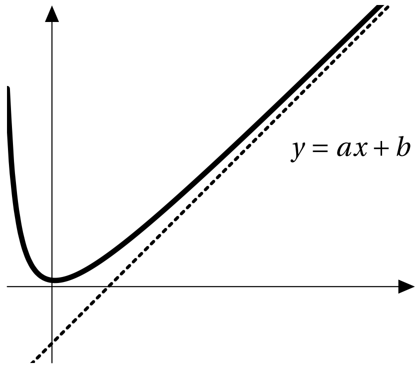
- On dit que la courbe de f admet une asymptote verticale d'équation $x = a$ si $\lim\limits_{x\to a^\pm} f(x) = \pm\infty$.
- On dit que la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = l$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$).
- On dit que la courbe de f admet une asymptote oblique d'équation $y = ax + b$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (a+b) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (a+b) = 0$).



Asymptote horizontale



Asymptote verticale



Asymptote oblique

Remarque 8. — On verra une méthode pour déterminer le comportement asymptotique (incluant les asymptotes obliques) plus tard dans l'année.

III. Dérivée, primitive

L'ensemble des éléments dans cette section sera revu dans l'année, de manière plus détaillée. On fait des rappels avec quelques compléments.

1) Nombre dérivé et tangente

Intuitivement, la tangente à la courbe d'une fonction f en un point M est la droite qui "colle" au mieux la courbe au voisinage de M. Elle permet d'avoir une idée de l'évolution de la courbe de f autour du point, et permet ainsi d'avoir un tracé précis au voisinage de ce point.

Définition 11. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On appelle **nombre dérivé** de f au point d'abscisse x, et on note $f'(x)$, la limite, lorsque celle-ci existe, du taux d'accroissement :

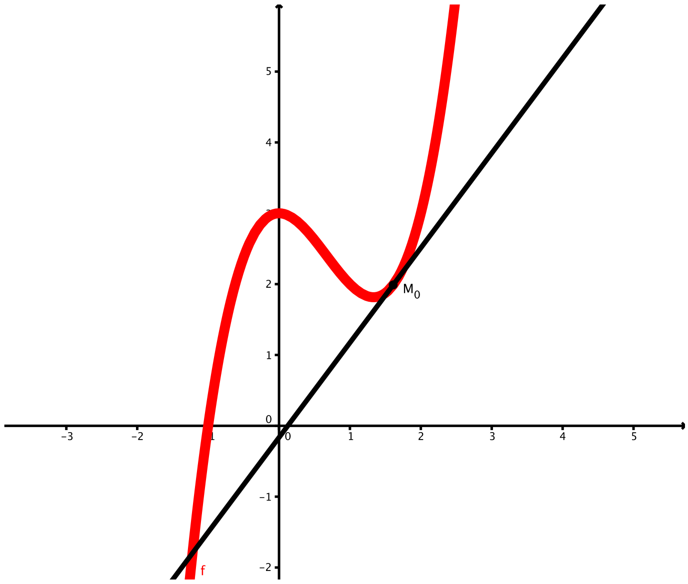
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

On le note également $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

Définition 12. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. La **tangente** à la courbe de f au point M_0 d'abscisse x_0 est, quand le nombre dérivé $f'(x_0)$ existe, la droite d'équation

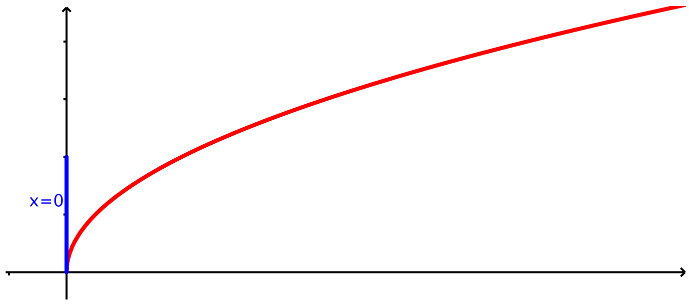
$$\mathrm{T}_{x_0} : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Le nombre $f'(x_0)$ représente ainsi le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0.



Remarque 9. — Si la limite du taux d'accroissement quand x tend vers a (ou $a^{\pm}$) est infini, la courbe de f admet au point d'abscisse a une tangente verticale (ou demi-tangente) d'équation $x = a$.

Exemple 11. — Par exemple, la fonction racine n'est pas dérivable en 0, et le taux d'accroissement a pour limite $+\infty$ en 0 : la courbe admet donc une demi-tangente verticale.



2) Formules de dérivation

On rappelle quelques résultats sur la dérivation : dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, et les applications de la dérivation.

Proposition 1. — *On dispose des dérivées suivantes :*

- $x \longmapsto a$ *($a \in \mathbb{R}$) a pour dérivée* $x \longmapsto 0$.
- $x \longmapsto x^n$ *($n \in \mathbb{N}^*$) a pour dérivée* $x \longmapsto nx^{n-1}$.
- $x \longmapsto \sqrt{x}$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *et a pour dérivée* $x \longmapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}$ *($n \in \mathbb{N}^*$) est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *et a pour dérivée* $x \longmapsto -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.
- $x \longmapsto e^x$ *se dérive en elle-même, et* $x \longmapsto \ln(x)$ *se dérive en* $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$.
- $\cos' = -\sin$ *et* $\sin' = \cos$.

Proposition 2. — *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle* I.

- *Si k est un réel, alors ku est dérivable sur* I, *et* $(ku)' = ku'$.
- $u + v$ *est dérivable sur* I *et* $(u+v)' = u' + v'$.
- uv *est dérivable sur* I *et* $(uv)' = u'v + uv'$.
- *Si v ne s'annule pas sur* I, *alors* $\frac{u}{v}$ *est dérivable sur* I, *et* $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Exercice 3. — Déterminer la dérivée des fonctions $f : x \longmapsto x\sqrt{x}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{x^2-2x+2}{x^2+1}$.

Solution. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$, mais dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (car la fonction racine n'est pas dérivable en 0). La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas). En appliquant les formules, on obtient alors :

$$\begin{aligned}\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) &= \sqrt{x} + x\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{3}{2}\sqrt{x} \\ \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) &= \frac{(2x-2)(x^2+1)-(x^2-2x+2)(2x)}{(x^2+1)^2}\end{aligned}$$

Proposition 3. — *Soient $u : \mathrm{I} \longrightarrow \mathrm{J}$ et $v : \mathrm{J} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables. Alors $v \circ u$ est dérivable sur* I, *et* $(v \circ u)' = u' \times v' \circ u$.

Exercice 4. — Déterminer la dérivée de la fonction $f : t \longmapsto \cos(\omega t + \varphi)$ et $g : x \longmapsto \sin(x^2+1)$, définies sur $\mathbb{R}$.

Solution. Toutes les fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

- f peut s'écrire $v \circ u$ avec $u : t \longmapsto \omega t + \varphi$ et $v : t \longmapsto \cos(t)$. En appliquant la formule précédente, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = u'(t) \times v'(u(t)) = \omega \times (-\sin(\omega t + \varphi))$$

- De même, g peut s'écrire $v \circ u$ avec $u : x \longmapsto x^2 + 1$ et $v : x \longmapsto \sin(x)$. En appliquant la formule précédente, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = u'(x) \times v'(u(x)) = 2x\cos(x^2+1)$$

3) Variations et dérivations

Rappelons le résultat important liant la dérivation et les variations.

Proposition 4. — *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle* I.

- *Si pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \geqslant 0$, *alors f est croissante sur* I.
- *Si pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) > 0$ *sauf en un nombre fini de réel, alors f est strictement croissante sur* I.
- *Si pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) \leqslant 0$, *alors f est décroissante sur* I.
- *Si pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) < 0$ *sauf en un nombre fini de réel, alors f est strictement décroissante sur*

I.

- *Si pour tout* $x \in \mathrm{I}$, $f'(x) = 0$, *alors* f *est constante sur* I.

Exercice 5. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 5$. Etudier les variations de f.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), et pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 3 = 3(x^2 + 2x + 1) = 3(x+1)^2$. Ainsi, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, sauf en -1 où elle s'annule. Ainsi, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

4) Continuité

La notion de continuité sera vue ultérieurement, dans le chapitre sur les limites. On rappelle quelques propriétés importantes (théorème des valeurs intermédiaires et théorème de la bijection).

Définition 13. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f est continue en $a \in \mathrm{I}$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.
f est dite continue sur I si elle est continue en tout point de a.

Remarque 10. — En utilisant les propriétés des limites, on en déduit que la somme, le produit, le quotient (quand il existe) et la composée de fonctions continues est continue.

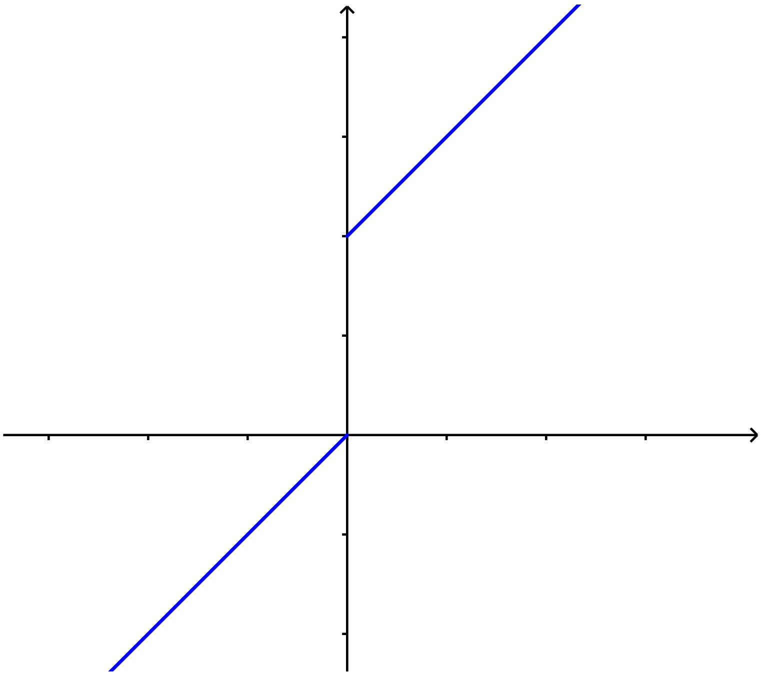
Exemple 12. — Il y a plusieurs types de discontinuité.

- Un "saut" ou discontinuité de première espèce. Par exemple, la fonction

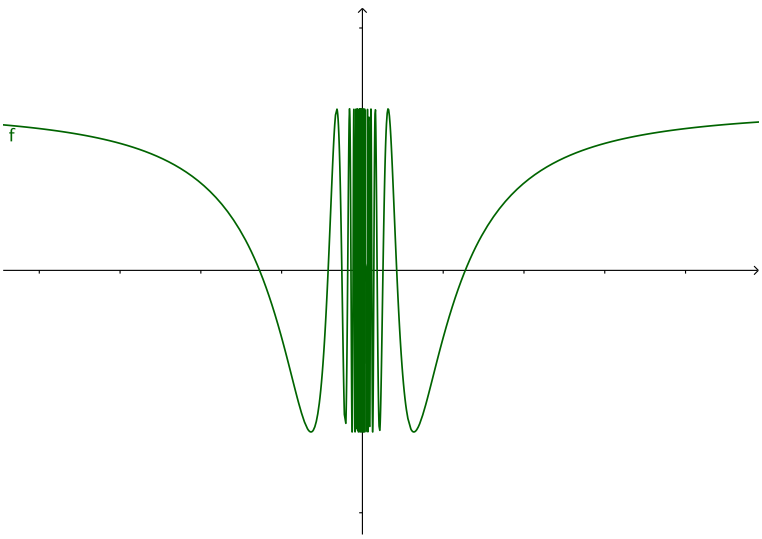
$$f : x \longmapsto \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

n'est pas continue en 0. En effet,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x + 1 = 1 \neq 0$$

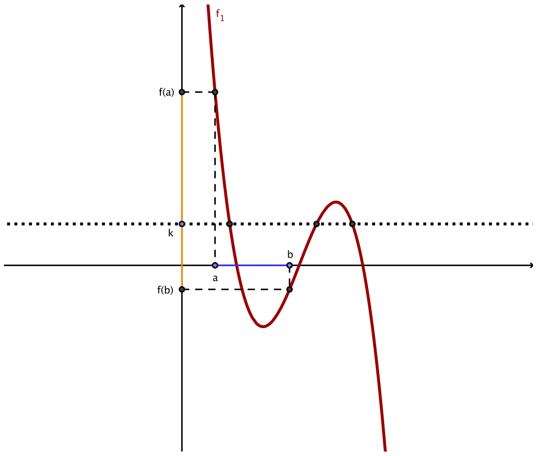


- Une des limites (à gauche ou droite) est infinie ou n'existe pas. On parle de discontinuité de deuxième espèce. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas continue en 0. En effet, la limite de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ en 0^+ est $+\infty$, et sin n'a pas de limite en $+\infty$.



La continuité est lié à un théorème essentiel : le théorème des valeurs intérmédiaires.

Théorème 3. — *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe* ***au moins*** *un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.*



Le théorème suivant est très souvent utilisé, lorsque la fonction est strictement monotone.

Théorème 4. — *Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans $[a;b]$.*

Remarque 11. — Si on est sur un intervalle non borné (par exemple, $[0;+\infty[$), le résultat reste valable, en remplaçant $f(a)$ et $f(b)$ par les limites en a et en b.

Exercice 6. — Prouver que l'équation (E) : $x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution. On se ramène à une écriture $f(x) = k$: $x + x\sqrt{x} = 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. L'image de $]0;+\infty[$ est donc

$$\left]\lim_{x\to 0} f(x); \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0;+\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x) = 1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

5) Dérivée d'une fonction réciproque

On dispose d'une conséquence importante du théorème des valeurs intermédiaires, dans le cas où la fonction est strictement monotone.

Proposition 5. — *Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On suppose que f est continue et strictement monotone sur I.*
La fonction f établit une bijection de I sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I})$. Alors, sa fonction réciproque $f^{-1} : \mathrm{J} \longrightarrow \mathrm{I}$ vérifie :

- *f^{-1} est continue sur J.*
- *f^{-1} est strictement monotone sur J, de même monotonie que f.*
- *Si f est dérivable sur I, alors f^{-1} est dérivable sur $\mathrm{J}\backslash\{f(x), \quad f'(x) = 0\}$.*

Graphiquement, la courbe représentative de la fonction réciproque f^{-1} est symétrique par rapport à la droite $y = x$.

Remarque 12. — Si f est dérivable sur I et que sa dérivée ne s'annule jamais sur I, alors f^{-1} est dérivable sur I.

Méthode 4 :
Pour déterminer la dérivée d'une fonction réciproque, on part du résultat

$$\forall\ x \in \mathrm{J}, \quad f \circ f^{-1}(x) = x$$

que l'on dérive :

$$\forall\ x \in \mathrm{J}, \quad (f^{-1})'(x) f' \circ f^{-1}(x) = 1$$

ce qui permet de déduire le résultat

$$\forall\ x \in \mathrm{J}, \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}$$

Exemple 13. — La fonction racine est la fonction réciproque de la fonction carrée sur $\mathbb{R}_+$. Retrouver sa dérivée.

Solution. La fonction carré est dérivable sur $\mathbb{R}^+$, de dérivée $x \longmapsto 2x$. La dérivée s'annule en 0, donc la fonction racine n'est pas dérivable en 0.
Notons g la fonction racine. On part du résultat

$$\forall\ x > 0, \quad (g(x))^2 = x$$

que l'on dérive

$$\forall\ x > 0, \quad g'(x) 2(g(x)) = 1$$

et donc

$$\forall\ x > 0, \quad g'(x) = \frac{1}{2g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

6) Primitives

On rappelle le théorème fondamental :

Théorème 5. — *Toute fonction continue sur un intervalle* I *admet des primitives sur* I.

Les primitives des fonctions usuelles sont à connaître par coeur.

Fonction f	**Primitive F**	**Intervalle I**
$x \longmapsto a$ (constante non nulle)	$x \longmapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto x^n (n \geqslant 1)$	$x \longmapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x^n}\ (n > 1)$	$x \longmapsto -\dfrac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	$]-\infty;0[$ ou$]0;+\infty[$
$x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	$x \longmapsto 2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$\ln x$	$\mathbb{R}_+^*$
$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$x \longmapsto \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \cos(x)$	$x \longmapsto \sin(x)$	$\mathbb{R}$
$x \longmapsto \sin(x)$	$x \longmapsto -\cos(x)$	$\mathbb{R}$

On peut utiliser les formules suivantes :

Remarque 13. —

$$\frac{u'}{\sqrt{u}} = (2\sqrt{u})' \qquad \frac{u'}{u^2} = \left(-\frac{1}{u}\right)'$$

$$2u'u = (u^2)' \qquad u'u^n = \left(\frac{1}{n+1}u^{n+1}\right)' \qquad u'u^\alpha = \left(\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' (\alpha \neq -1)$$

$$\frac{u'}{u} = (\ln|u|)' \qquad u'e^u = (e^u)' \qquad u'.(v' \circ u) = (v \circ u)'$$

Exemple 14. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$. Déterminer une primitive de f.

Solution. On pose $u(x) = \ln x$. Alors $f(x) = u'(x)u(x)$ et admet donc comme primitive $\mathrm{F} : x \longmapsto \frac{1}{2}u^2(x) = \frac{1}{2}\ln(x)^2$.

IV. Fonctions de référence

1) Fonctions affines

Définition 14. — Une fonction affine est une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax + b$, où a et b sont des réels fixés. a est appelé le **coefficient directeur** de f et b son **coefficient à l'origine**.

Proposition 6. — *Sa courbe représentative est une droite.*
On rappelle le tableau de signe et variations :

- *Si $a > 0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

- *Si $a<0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\searrow$	0	$\searrow$	

2) Fonction trinômes

Définition 15. — On appelle fonction **trinôme du second degré** à coefficients réels une fonction de la forme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$, avec a, b et c trois réels fixes et $a \neq 0$.

Proposition 7. — *Sa courbe représentative est une parabole.*
On rappelle son tableau de variations :

- *Si $a>0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- *Si $a<0$:*

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Proposition 8. — *On appelle **discriminant** du trinôme $f : x \longmapsto ax^2+bx+c$ $(a \neq 0)$ le nombre $\Delta = b^2-4ac$.*

- *Si $\Delta>0$, f admet deux racines :*

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Il se factorise en $f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$ et son tableau de signe est donné par

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de $-a$*	0	*signe de a*	

- *Si $\Delta = 0$, f admet une racine $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Il se factorise en $f(x) = a(x - x_0)^2$ et son tableau de signe est donné par*

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
$f(x)$		*signe de a*	0	*signe de a*	0

- *Si $\Delta < 0$, f n'admet pas de racine réelle et ne se factorise pas sur $\mathbb{R}$. Son tableau de signe est donné par*

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	*signe de a*	

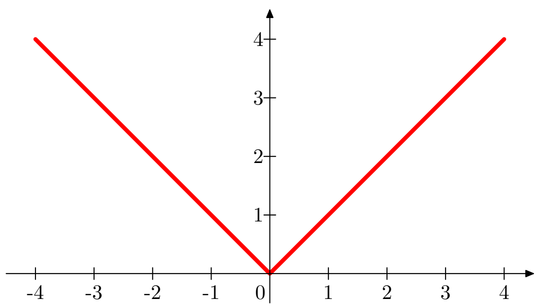
3) Fonction valeur absolue

Définition 16. — La fonction **valeur absolue** est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$$

Exemple 15. — $|3| = 3$ et $|-4| = 4$.

Remarque 14. — Par construction, la valeur absolue est une fonction paire, décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et croissante sur $\mathbb{R}^+$.



Propriété 2. — *Soient x, y deux réels, et $n \in \mathbb{N}$.*

$$|-x| = |x| \text{ (parité)} \qquad |xy| = |x||y| \qquad |x^n| = |x|^n$$

$$\text{Si } y \neq 0, \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x| = |y| \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

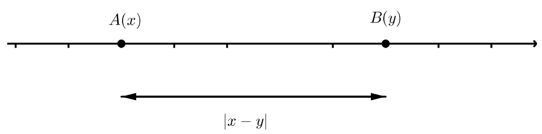
$$\text{Si } y > 0, \quad |x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$$

Si $y > 0$, $\quad |x| \geqslant y \Leftrightarrow x \leqslant -y$ ou $x \geqslant y$

Théorème 6 (Inégalité triangulaire)**.** — *Pour tous réels x et y,*

$$|x+y| \leqslant |x|+|y| \quad \textit{et} \quad |x|-|y| \leqslant |x-y|$$

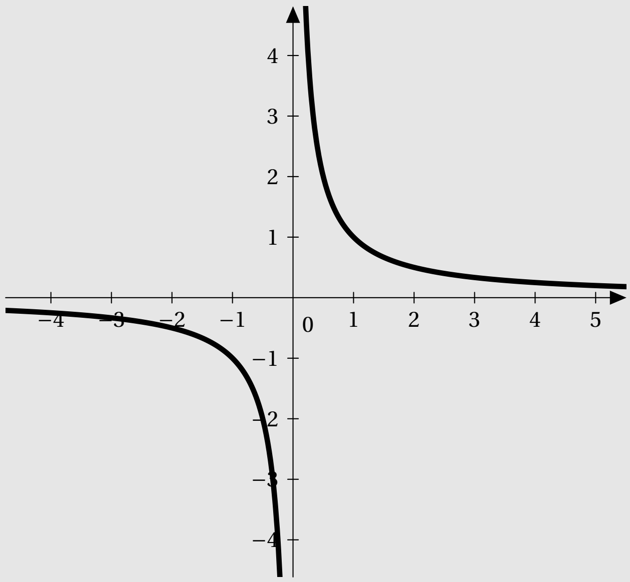
Remarque 15. — Si x et y sont des réels, $|x-y|$ représente la distance entre les points A d'abscisse x et B d'abscisse y.



Ainsi $|4-1| = 3$ car la distance entre le point A(1) et le point B(4) est de 3.

4) Fonctions racine carrée et inverse

Définition 17. — La fonction **inverse** est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$, par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.



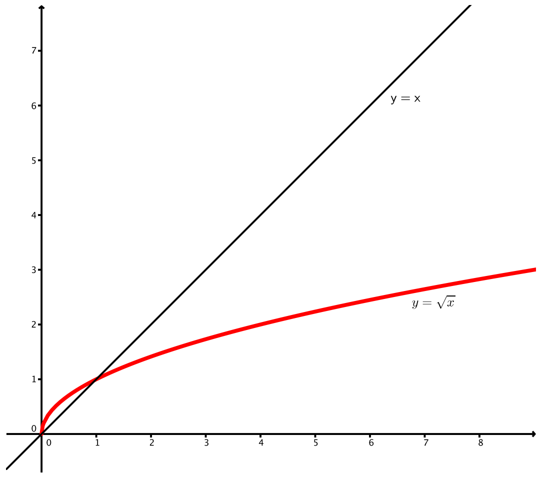
Propriété 3. —

- *La fonction inverse est impaire : $\forall\ x \in \mathbb{R}^*$, $\quad \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x}$.*
- *Pour tout réel $a \neq 0$, $\dfrac{1}{x} = a \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{a}$.*

Définition 18. — Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ est l'unique réel positif dont le carré est x :

$$\sqrt{x} \geqslant 0 \quad \text{et} \quad (\sqrt{x})^2 = x$$

La fonction $x \longmapsto \sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.



Propriété 4. —

- $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{1} = 1$.
- *Pour tous réels positifs x et y :*

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}, \qquad (\sqrt{x})^2 = x \qquad \text{et si } y \neq 0, \quad \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

- *Pour tout réel x,* $\sqrt{x^2} = |x|$.

Méthode 5 :
Pour déterminer une limite avec une racine carrée, on peut multiplier numérateur et dénominateur par la quantité conjugué.

Exemple 16. — Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x$.

Solution. La limite est indéterminée. On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{x^2-1} - x = \frac{(\sqrt{x^2-1} - x)(\sqrt{x^2-1} + x)}{\sqrt{x^2-1} + x} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-1} + x}$$

La limite n'est plus indéterminée, et par quotient :

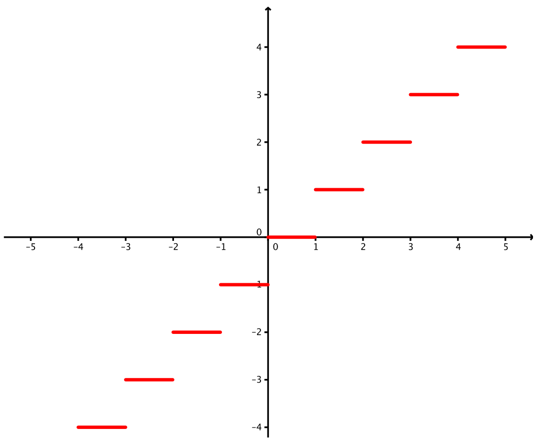
$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} - x = 0$$

5) Fonction partie entière

Définition 19. — Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière** de x, et on note $\mathrm{E}(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$, le plus grand nombre entier inférieur ou égal à x.

Remarque 16. — On utilisera en général la notation $[x]$, voire $\lfloor x \rfloor$.

Exemple 17. — Ainsi, $[3,2] = 3,\ [\pi] = 3,\ [-3,2] = -4$.



Propriété 5. —

- $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad [x] \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad [x] \leqslant x$ *par définition.*
- $\forall\ x \in \mathbb{R},\quad x < [x] + 1$ *aussi par définition. Ainsi,*

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad [x] \leqslant x < [x] + 1$$

  On a également la relation

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\quad x - 1 < [x] \leqslant x$$

- *La fonction partie entière est constante par morceaux : pour tout* $x \in [n; n+1[$ *(où* $n \in \mathbb{Z}$*),* $[x] = n$.

Définition 20. — Soit x un nombre réel. On appelle **partie entière supérieure**, et on note $\lceil x \rceil$, le plus petit nombre entier supérieur ou égal à x.

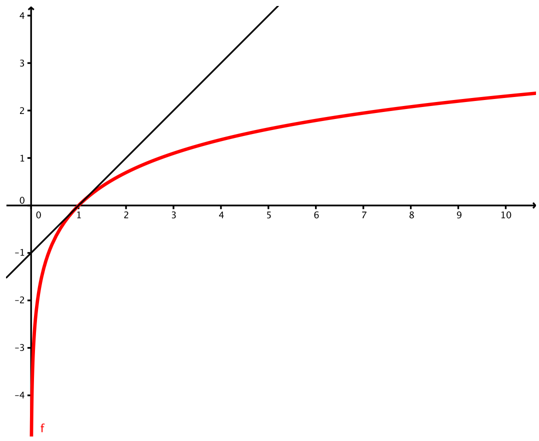
Remarque 17. — On dispose également d'une inégalité pratique : $\forall\ x \in \mathbb{R},\ \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil$

V. Fonctions logarithmes, exponentielle et puissances

1) Fonction logarithme népérien

Définition 21. — La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que

$$\forall\ x > 0,\quad \ln'(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \ln(1) = 0$$



Proposition 9. — *On dispose des limites suivantes :*

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$.
- *(croissances comparées) Pour tout entier naturel* $n \geqslant 1$

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad et \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{\ln(x)} = +\infty$$

- *(taux d'accroissement)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ *et* $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln(x)}{x-1} = 1$.

Propriété 6. —

- *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Pour tous réels* x *et* y *de* $\mathbb{R}_+^*$,

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \quad et \quad \ln\left(\frac{1}{y}\right) = -\ln(y)$$

Ainsi,

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y) \qquad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \ln(x^n) = n\ln(x)$$

$$\ln\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2}\ln(x)$$

- *Grâce à la stricte croissance de* $\ln$, *pour tous réels* x, y *strictement positifs :*

$$\ln(x) = \ln(y) \Leftrightarrow x = y \quad et \quad \ln(x) < \ln(y) \Leftrightarrow x < y$$

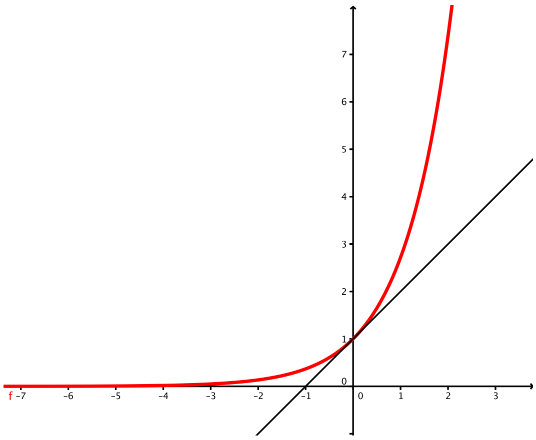
En particulier $\ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ *et* $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}$ *avec* $\mathrm{e} \approx 2{,}718$.

On dispose d'autres fonctions logarithmes.

Définition 22. — Soit $a > 1$. On appelle logarithme de base a, et on note $\log_a$, la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par $\log_a(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(a)}$.
On a un cas particulier (important en Physique-Chimie) : le logarithme décimal, $\log_{10}$, que l'on note plus simplement log.

2) Fonction exponentielle

Définition 23. — La fonction **exponentielle**, noté exp, est l'unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée est elle-même, et telle que $\exp(0) = 1$. On note $\exp(x) = \mathrm{e}^x$.



Proposition 10. — *On dispose des limites suivantes :*

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$.
- *(croissances comparées) Pour tout entier naturel* $n \geqslant 1$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n \mathrm{e}^x = 0 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$$

- *(taux d'accroissement)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$.

Propriété 7. —

- *La fonction* exp *est strictement croissante et positive sur* $\mathbb{R}$.
- *Pour tous réels x et y,*

$$\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y) \quad \textit{et} \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

Ainsi,

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad \textit{et} \quad \forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad (\exp(x))^n = \exp(nx)$$

De même

$$\sqrt{\exp(x)} = \exp\left(\frac{1}{2}x\right)$$

- *Grâce à la stricte croissance de* exp, *pour tout réels x et y :*

$$\exp(x) = \exp(y) \Leftrightarrow x = y \quad \textit{et} \quad \exp(x) < \exp(y) \Leftrightarrow x < y$$

Remarque 18. — La fonction exponentielle est la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien :

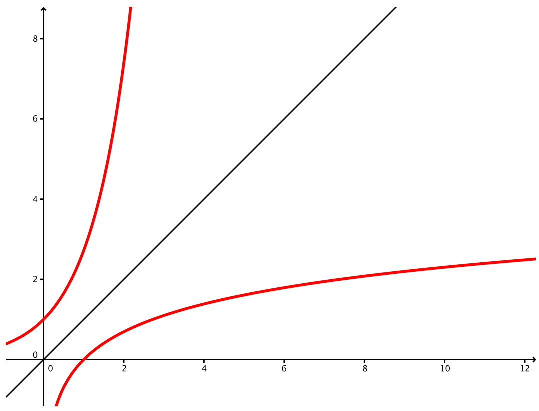
- Pour tout réel x, $\ln(\mathrm{e}^x) = x$.
- Pour tout réel $x > 0$, $\mathrm{e}^{\ln(x)} = x$.

- Pour tout réel x, et tout réel $y > 0$, $e^x = y \Leftrightarrow x = \ln(y)$.

Propriété 8 (Comparaison ln, exp, $x \longmapsto x$)**.** — *Pour tout réel $x > 0$, on a*

$$\ln(x) \leqslant x \leqslant \exp(x)$$

et les courbes représentatives de exp *et* ln *sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.*



On dispose, de même, d'autres fonctions exponentielles :

Définition 24. — Pour tout réel $a > 0$, on appelle exponentielle de base a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a^x : x \longmapsto \mathrm{e}^{x\ln(a)}$.

Remarque 19. — La fonction exponentielle est donc l'exponentielle de base e. Lorsqu'on veut étudier une fonction exponentielle de base a, on reviendra systématiquement à la définition.

Remarque 20. — L'exponentielle de base a est la bijection réciproque du logarithme de base a.

3) Fonctions puissances

Les fonctions puissances généralisent les fonctions $x \longmapsto x^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Définition 25. — Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $x^\alpha := \mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$.

Remarque 21. — Attention : l'écriture x^α n'est qu'une notation. En pratique, on repassera toujours à l'écriture $\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}$.

Propriété 9. — *Les fonctions puissances possèdent les mêmes règles de calcul que les puissances entières :*

- $\forall\ (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$.
- $\forall\ \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\ (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad (x \times y)^\alpha = x^\alpha y^\alpha \quad et \quad x^{-\alpha} = \dfrac{1}{x^\alpha}$. *Ainsi,*

$$\left(x^\alpha\right)^\beta = x^{\alpha\beta}, \qquad x^{\alpha-\beta} = \frac{x^\alpha}{x^\beta} \quad et \quad \left(\frac{x}{y}\right)^\alpha = \frac{x^\alpha}{y^\alpha}$$

Démonstration. Les démonstrations sont toutes sur le même modèle. Soit $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ et $x>0$. Alors

$$x^{\alpha+\beta}=\mathrm{e}^{(\alpha+\beta)\ln(x)}=\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)+\beta\ln(x)}=\mathrm{e}^{\alpha\ln(x)}\mathrm{e}^{\beta\ln(x)}=x^\alpha x^\beta$$

où on utilise les propriétés de la fonction exponentielle. □

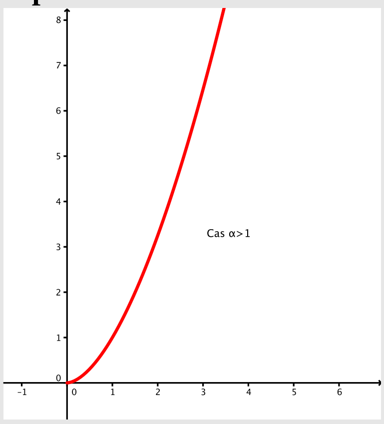
Remarque 22. — Ainsi, pour tout $x>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n=x$$

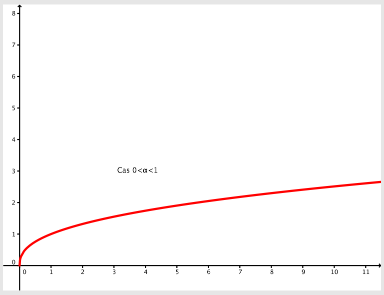
En particulier, $\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$ pour $x>0$. Par abus d'écriture, on confondra les deux écritures pour $x\geqslant 0$.

La représentation graphique des fonctions puissances dépend de α :

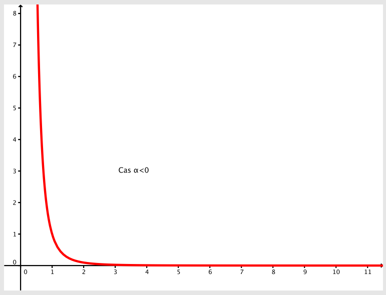
Propriété 10. —



Cas $\alpha>1$



Cas $0<\alpha<1$



Cas $\alpha<0$

Proposition 11. — *On dispose des limites suivantes :*

- *Cas* $\alpha>0$ *:*

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=0\quad \textit{et}\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$$

- *Cas* $\alpha<0$ *:*

$$\lim_{x\to 0^+}x^\alpha=+\infty\quad \textit{et}\quad \lim_{x\to+\infty}x^\alpha=0$$

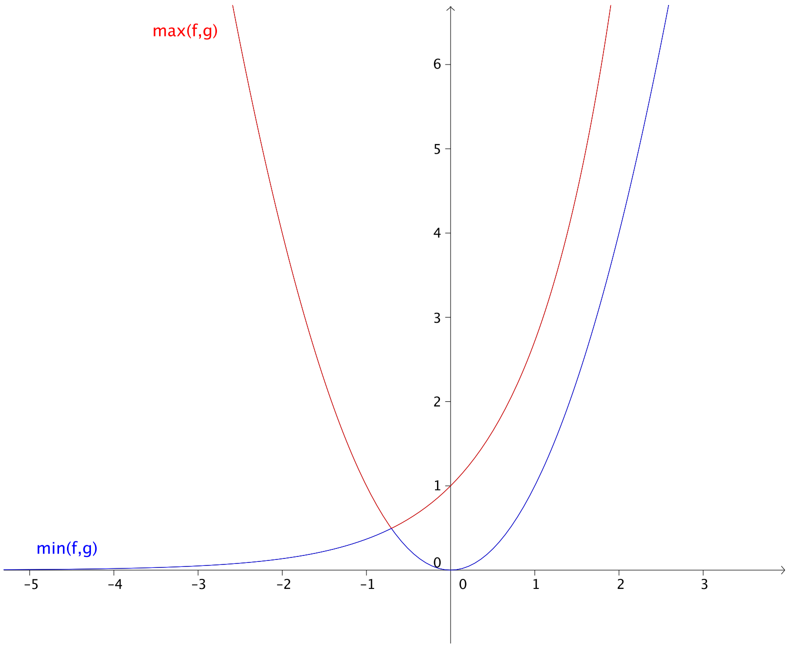
De plus, la fonction $x\longmapsto x^\alpha$ *(pour* $\alpha\in\mathbb{R}^*$*) est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$*, et sa dérivée est* $x\longmapsto \alpha x^{\alpha-1}$.

4) Maximum, minimum de deux fonctions

Définition 26. — Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I.

- On appelle **maximum** de f et g, et on note $\max(f,g)$ l'application qui à tout réel $x\in\mathrm{I}$ associe le plus grand des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.
- On appelle **minimum** de f et g, et on note $\min(f,g)$ l'application qui à tout réel $x\in\mathrm{I}$ associe le plus petit des deux nombres $f(x)$ et $g(x)$.

Exemple 18. — Si $f : x \longmapsto x^2$ et $g : x \longmapsto e^x$, on obtient la figure suivante :



Théorème 7. — *Soient f et g deux fonctions définies sur un même intervalle I. Alors, pour tout réel $x \in \mathrm{I}$:*

$$\max(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} \quad \textit{et} \quad \min(f,g)(x) = \frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2}$$

Démonstration. Si $f(x) > g(x)$ (l'autre cas est similaire), alors $|f(x)-g(x)| = f(x)-g(x)$ et donc

$$\frac{f(x)+g(x)+|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)+f(x)-g(x)}{2} = f(x) = \max(f,g)(x)$$
$$\frac{f(x)+g(x)-|f(x)-g(x)|}{2} = \frac{f(x)+g(x)-(f(x)-g(x))}{2} = g(x) = \min(f,g)(x)$$

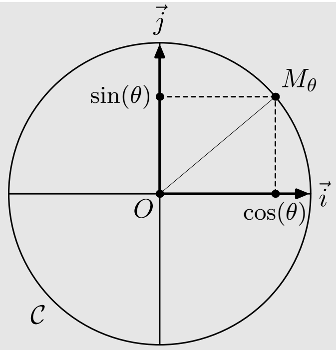
□

VI. Fonctions trigonométrique

1) Cercle trigonométrique

Rappel 1. — *On se donne un repère orienté $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On appelle **cercle trigonométrique** le cercle de centre O et de rayon 1.*

A tout réel θ, on associe son point image M_θ en parcourant une distance θ sur le cercle à partir du point $(1;0)$, dans le sens trigonométrique (le sens inverse des aiguilles d'une montre) si $\theta > 0$, ou une distance $-\theta$ dans le sens inverse si $\theta < 0$.



Les coordonnées du point M_θ *sont alors* $(\cos(\theta);\sin(\theta))$.

Réciproquement, tout point M *du cercle trigonométrique est l'image* M_θ *pour un certain réel* θ.

Remarque 23. — Puisque le cercle trigonométrique est de périmètre 2π, on en déduit que le point θ et le point $\theta+2\pi$ ont la même image M_θ sur le cercle, et ainsi $\cos(\theta+2\pi)=\cos(\theta)$, et $\sin(\theta+2\pi)=\sin(\theta)$. Ainsi, les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Propriété 11. — *Pour tout réel x, on a* $\cos(-x)=\cos(x)$ *et* $\sin(-x)=-\sin(x)$. *Ainsi,* cos *est paire,* sin *est impaire.*

Solution. En effet, θ et $-\theta$ ont une image symétrique par rapport à l'axe des abscisses sur le cercle trigonométrique. Ils ont donc même abscisses, mais des ordonnées opposées.

Définition 27. — Pour tout réel $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ (avec $k\in\mathbb{Z}$), on définit la **tangente** de x par

$$\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Remarque 24. — tan n'est définie que si $\cos(x)\neq 0$, c'est-à-dire $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$.

Propriété 12. — tan *est impaire.*

Démonstration. Pour tout réel $x\not\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a

$$\tan(-x)=\frac{\sin(-x)}{\cos(-x)}=\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}=-\tan(x)$$

□

2) Formules

L'ensemble de ces formules et résultats sont à savoir retrouver. Les formules indiquées d'un ♡ sont à connaître par-coeur.

Proposition 12. — *On dispose des cosinus, sinus et tangente particuliers suivants :*

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	0
$\tan(x)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$-$	0	0

Proposition 13. — *Soient a et b deux réels. Alors*

① ♡ $\cos^2(a)+\sin^2(a)=1$.

② *Symétries :*

$$\cos(-a)=\cos(a),\quad \sin(-a)=-\sin(a)$$

$$\cos(a+\pi)=-\cos(a),\quad \sin(a+\pi)=-\sin(a)$$

$$\cos(\pi-a)=-\cos(a),\quad \sin(\pi-a)=\sin(a)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\sin(a),\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}-a\right)=\cos(a)$$

$$\cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin(a),\quad \sin\left(a+\frac{\pi}{2}\right)=\cos(a)$$

③ *Pour $a\neq\frac{\pi}{2}+k\pi,\quad k\in\mathbb{Z}$:*

$$\tan(-x)=-\tan(x),\quad \tan(\pi-x)=-\tan(x),\quad \tan(x+\pi)=\tan(x)$$

$$\tan\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{\tan(x)}\quad \textit{et}\quad \tan\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan(x)}$$

④ ♡ *Formules d'addition :*

$$\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)\quad \textit{et}\quad \cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)\quad \textit{et}\quad \sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$$

⑤ *Formule de duplication :*

$$\cos(2a)=2\cos^2(a)-1=1-2\sin^2(a)=\cos^2(a)-\sin^2(a)\quad \textit{et}\quad \sin(2a)=2\sin(a)\cos(a)$$

⑥ *Formule de factorisation :*

$$\cos(a)+\cos(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\qquad \cos(a)-\cos(b)=-2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$\sin(a)+\sin(b)=2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\qquad \sin(a)-\sin(b)=2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

⑦ ♡ *Tangente : pour* $a, b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$$\tan(a+b) = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)} \quad et \quad \tan(a-b) = \frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$$

⑧ *Tangente de l'angle moitié : soit* $a \in]-\pi;\pi[$, *et* $t = \tan\left(\frac{a}{2}\right)$. *Alors*

$$\cos(a) = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad \sin(a) = \frac{2t}{1+t^2} \quad et \quad \tan(a) = \frac{2t}{1-t^2}$$

Démonstration. Les formules d'addition sont admises (elles se démontrent à l'aide du produit scalaire). Pour ⑤, on utilise les formules d'addition et la relation $\cos^2(a) + \sin^2(a) = 1$:

$$\cos(2a) = \cos(a+a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = \cos^2(a) - (1-\cos^2(a)) = 2\cos^2(a) - 1$$

et

$$\sin(2a) = \sin(a+a) = \sin(a)\cos(a) + \cos(a)\sin(a) = 2\sin(a)\cos(a)$$

Pour ⑥, on utilise la définition de tan et les formules d'addition :

$$\tan(a+b) = \frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)} = \frac{\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)}$$

en divisant par $\cos(a)\cos(b)$ numérateur et dénominateur (non nul) :

$$\tan(a+b) = \frac{\frac{\sin(a)}{\cos(a)} + \frac{\sin(b)}{\cos(b)}}{1 - \frac{\sin(a)\sin(b)}{\cos(a)\cos(b}} = \frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$$

□

Proposition 14. — tan *est* π*-périodique.*

Démonstration. Pour tout réel $x \in \mathscr{D}_{\tan}$, $x+\pi \in \mathscr{D}_{\tan}$, et on a

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

Ainsi, tan est π-périodique. □

3) Equations

Ces résultats se déduisent directement du cercle trigonométrique, qu'on privilégiera.

Proposition 15. — *Soit a un réel.*

- *L'équation* $\cos(x) = \cos(a)$ *équivaut à* $x = a + 2k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*) ou* $x = -a + 2k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*).*
- *L'équation* $\sin(x) = \sin(a)$ *équivaut à* $x = a + 2k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*) ou* $x = \pi - a + 2k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*).*
- *L'équation* $\tan(x) = \tan(a)$ *équivaut à* $x = a + k\pi$ *(*$k \in \mathbb{Z}$*).*

Exemple 19. — Résoudre l'équation $\cos(x) = \frac{1}{2}$.

Solution. L'équation équivaut à $\cos(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Ainsi, $\cos(x) = \frac{1}{2}$ si et seulement si

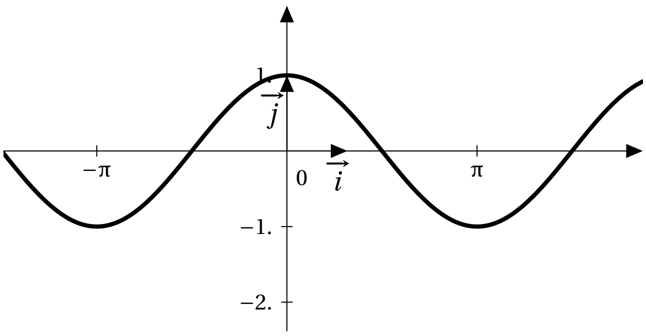
$$x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

4) Fonctions trigonométriques

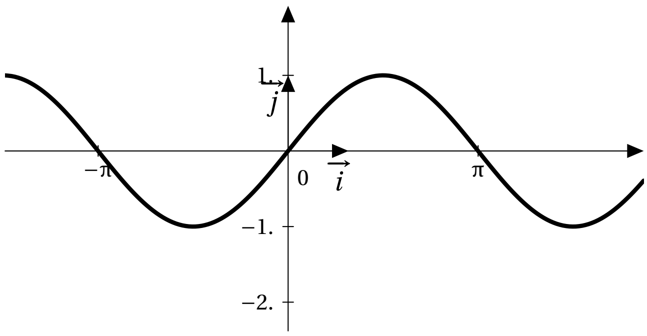
Proposition 16. — *Les fonctions sinus, cosinus, et tangente sont dérivables sur leur domaine de définition, et on a :*

$$\sin' = \cos, \quad \cos' = -\sin \quad \textit{et} \quad \tan' = 1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$$

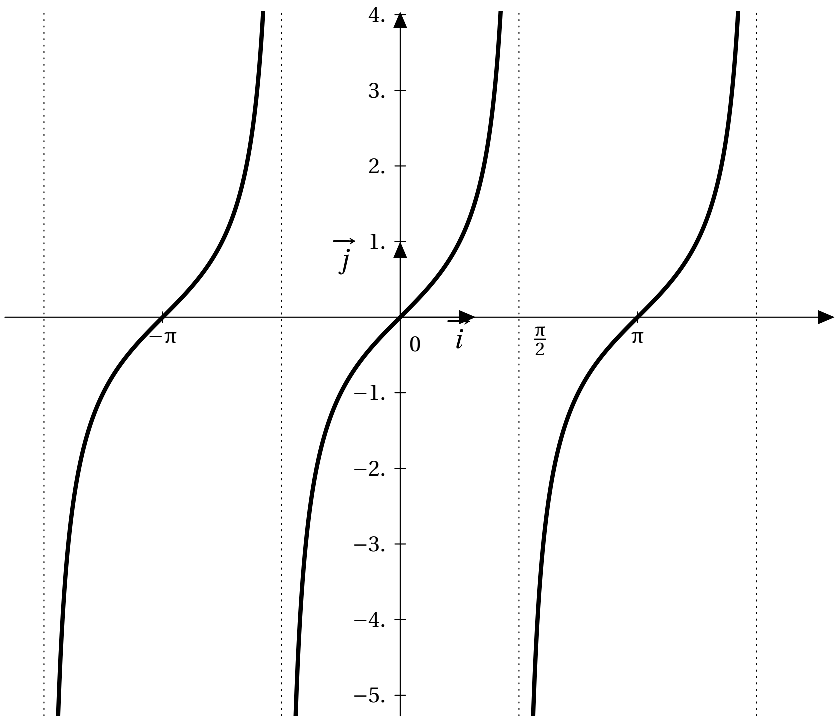
Sinus et cosinus sont 2π-périodiques, et tangente est π-périodique.



Fonction cosinus



Fonction sinus



Fonction tangente

Démonstration. On admet les dérivées de sin et cos (qui peuvent se faire en admettant les nombres dérivés en 0). Pour tan, par quotient de deux fonctions dérivables, tan est dérivable sur son domaine de définition et pour tout $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$:

$$\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x)$$

On peut également écrire $\dfrac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ en utilisant la relation $\cos^2(x)+\sin^2(x) = 1$.
Enfin, pour la π-périodicité de tan, remarquons que pour tout réel x, $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ et $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$. Par quotient, pour $x \not\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, on a donc

$$\tan(x+\pi) = \frac{\sin(x+\pi)}{\cos(x+\pi)} = \frac{-\sin(x)}{-\cos(x)} = \tan(x)$$

□

Proposition 17. — *On dispose des limites suivantes :*

- $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$.
- *(taux d'accroissement)* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-1}{x^2} = \dfrac{1}{2}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$.

Démonstration. On remarque rapidement que

$$\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sin(x) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos(x) = 0^+$$

Par quotient, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$.
De même,

$$\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \sin(x) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \cos(x) = 0^+$$

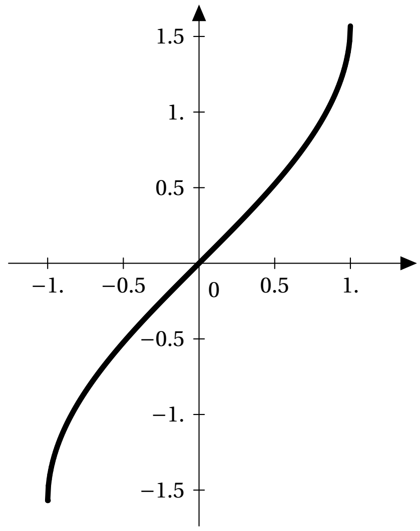
Par quotient, $\lim\limits_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$. □

5) Fonctions trigonométriques réciproques

a) Fonction arcsin

Théorème 8. — *La fonction sinus est continue et strictement croissante sur* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. *Elle établit une bijection de* $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ *sur* $[-1;1]$.

Définition 28. — On appelle **arc sinus**, et on note arcsin, la fonction réciproque de la restriction de sin sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.



Propriété 13. — arcsin *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et, pour tout réel* $x \in]-1;1[$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de arcsin *admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisse* -1 *et* 1.

Démonstration. On admet que arcsin est dérivable sur $]-1;1[$. Pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a (par définition de arcsin)

$$\sin(\arcsin(x)) = x$$

On dérive cette relation pour $x \in]-1;1[$:

$$\arcsin'(x)\sin'(\arcsin(x)) = 1 \quad \text{soit} \quad \arcsin'(x)\cos(\arcsin(x)) = 1$$

Or, pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a $\cos(\arcsin(x))^2 + \sin(\arcsin(x))^2 = 1$, soit $\cos(\arcsin(x))^2 = 1 - x^2$. Puisque $\arcsin(x) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $\cos(\arcsin(x)) > 0$ et donc

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

On en déduit donc, pour tout réel $x \in]-1;1[$

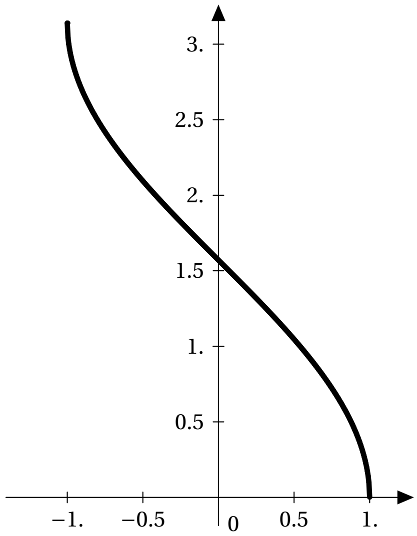
$$\arcsin'(x)\sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow \arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

b) Fonction arccos

Théorème 9. — *La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur* $[0;\pi]$. *Elle établit une bijection de* $[0;\pi]$ *sur* $[-1;1]$.

Définition 29. — On appelle **arc cosinus**, et on note arccos, la fonction réciproque de la restriction de cos sur $[0;\pi]$.



Propriété 14. — arccos *est dérivable sur* $]-1;1[$ *et, pour tout réel* $x \in]-1;1[$

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

La courbe représentative de arccos *admet des demi-tangentes verticales aux points d'abscisse* -1 *et* 1.

Démonstration. On admet que arccos est dérivable sur $]-1;1[$. Pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a (par définition de arccos)

$$\cos(\arccos(x)) = x$$

On dérive cette relation pour $x \in]-1;1[$:

$$\arccos'(x)\cos'(\arccos(x)) = 1 \quad \text{soit} \quad \arccos'(x)(-\sin(\arccos(x))) = 1$$

Or, pour tout réel $x \in]-1;1[$, on a $\cos(\arccos(x))^2 + \sin(\arccos(x))^2 = 1$, soit $\sin(\arccos(x))^2 = 1-x^2$. Puisque $\arccos(x) \in]0;\pi[$, on a $\sin(\arccos(x)) > 0$ et donc

$$\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$$

On en déduit donc, pour tout réel $x \in]-1;1[$

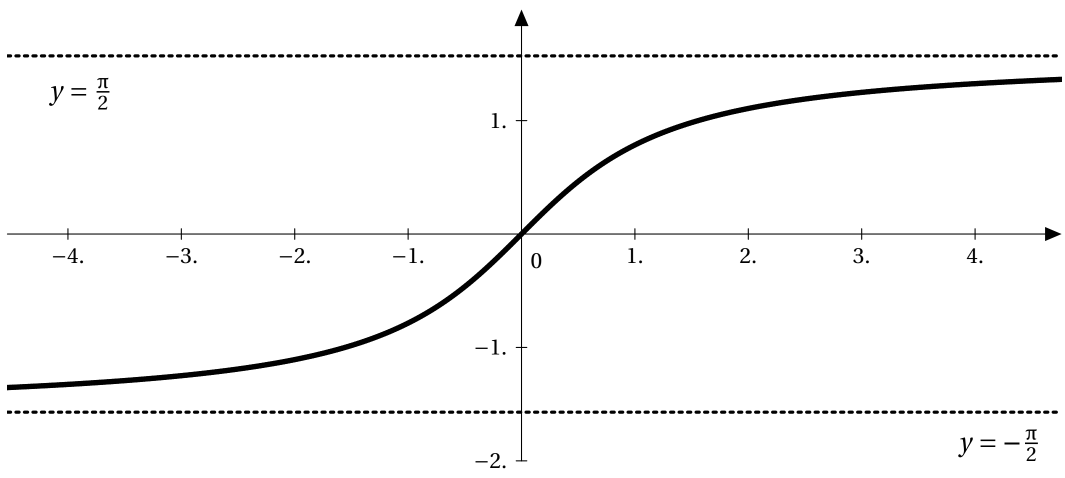
$$\arccos'(x)(-\sqrt{1-x^2}) = 1 \Leftrightarrow \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

□

c) Fonction arctan

Théorème 10. — *La fonction tangente est continue et strictement croissante sur* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. *Elle établit une bijection de* $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]-\infty;+\infty[$.

Définition 30. — On appelle **arc tangente**, et on note arctan, la fonction réciproque de la restriction de tan sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.



Propriété 15. — *On a*

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Solution. En effet, $\lim_{x\to\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \tan(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan(x) = -\infty$. Par définition de la fonction réciproque, on obtient bien

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$$

Propriété 16. — arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et, pour tout réel* $x \in \mathbb{R}$

$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Démonstration. On admet que arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a (par définition de arctan)

$$\tan(\arctan(x)) = x$$

On dérive cette relation pour $x \in \mathbb{R}$:

$$\arctan'(x)\tan'(\arctan(x)) = 1 \quad \text{soit} \quad \arctan'(x)(1+\tan^2(\arctan(x))) = 1$$

et donc, puisque $\tan^2(\arctan(x)) = x^2$

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

□

VII. Fonctions hyperboliques

1) Définitions

Définition 31. — On définit les trois fonctions suivantes :

- la fonction **cosinus hyperbolique**, notée ch, définie pour tout réel x par

$$\mathrm{ch}(x) = \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

- la fonction **sinus hyperbolique**, notée sh, définie pour tout réel x par

$$\mathrm{sh}(x) = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$$

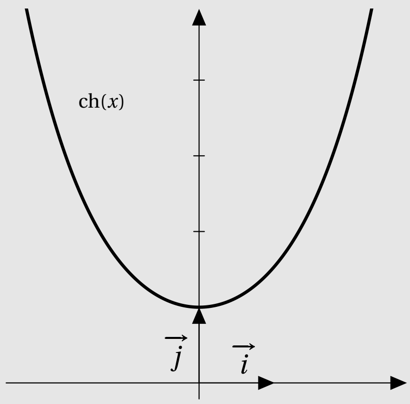
- la fonction **tangente hyperbolique**, notée th, définie pour tout réel x par

$$\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}$$

2) Fonctions hyperboliques

Proposition 18. — *La fonction cosinus hyperbolique est paire, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et* $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{ch}(x)$			$+$		
$\mathrm{ch}(x)$		$\searrow$	1	$\nearrow$	



$$\textit{Enfin,}\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{ch}(x) = \lim_{x\to+\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$$

Démonstration. Remarquons que, pour tout réel x,

$$\mathrm{ch}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

Ainsi, ch est paire.
Par définition, ch est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}'(x) = \frac{\mathrm{e}^x + (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{sh}(x)$$

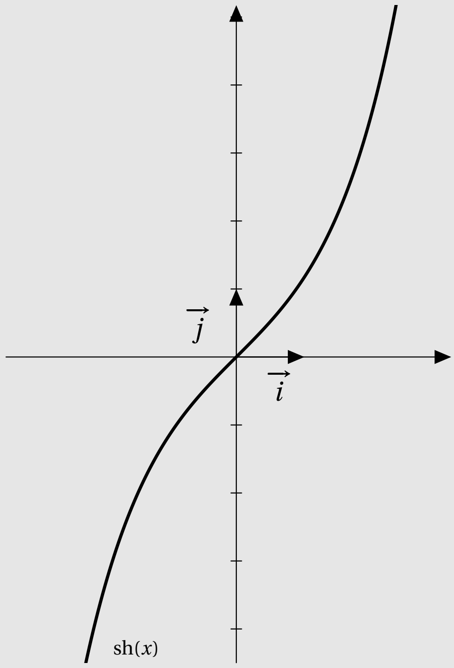
Remarquons alors que $\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \geqslant 0$ si et seulement si $\mathrm{e}^x \geqslant \mathrm{e}^{-x}$ soit, par stricte croissance de l'exponentielle $x \geqslant -x$ et donc $x \geqslant 0$. On en déduit donc le tableau de signe de $\mathrm{ch}'(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	

Ainsi, ch est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Puisque 1 est son minimum, on en déduit que ch est strictement positive. Enfin, les limites se déduisent par somme. □

Proposition 19. — *La fonction sinus hyperbolique est impaire, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et* $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{sh}(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{sh}(x)$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	



Enfin,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{sh}(x) = -\infty \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{sh}(x) = +\infty$$

et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) = 1$$

Solution. Remarquons que, pour tout réel x :

$$\mathrm{sh}(-x) = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(-x)}}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{x}}{2} = -\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = -\,\mathrm{sh}(x)$$

Ainsi, sh est impaire.
Par définition, sh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{sh}'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x} - (-\mathrm{e}^{-x})}{2} = \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \mathrm{ch}(x)$$

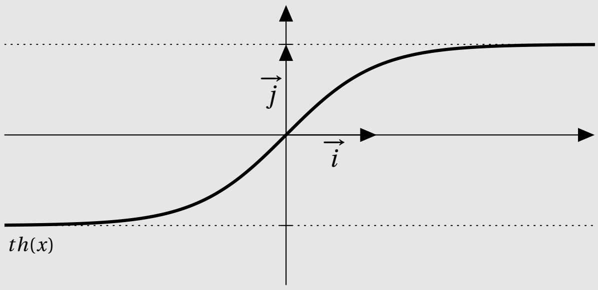
On vient de voir que ch est strictement positive donc sh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Les limites se déduisent par somme.
Enfin, pour tout réel x :

$$\begin{aligned}
\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x) &= \left(\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\cancel{\mathrm{e}^{2x}} + 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \cancel{\mathrm{e}^{-2x}}}{4} - \frac{\cancel{\mathrm{e}^{2x}} - 2\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{-x} + \cancel{\mathrm{e}^{-2x}}}{4} \\
&= \frac{4}{4} = 1
\end{aligned}$$

Proposition 20. — *La fonction tangente hyperbolique est impaire, continue et dérivable sur* $\mathbb{R}$*. On a*

$$\mathrm{th}' = 1 - \mathrm{th}^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}^2}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{th}(x)$		$-$	0	$+$	
$\mathrm{th}(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1



Enfin,

$$\lim_{x\to-\infty} \mathrm{th}(x) = -1 \quad \textit{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \mathrm{th}(x) = 1$$

Solution. En utilisant la parité de ch et l'imparité de sh, on remarque que pour tout réel x,

$$\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = \frac{-\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = -\mathrm{th}(x)$$

Ainsi, th est impaire.
Par définition, th est bien définie (car $\mathrm{ch}(x) > 0$ pour tout réel x) et est dérivable comme quotient de deux fonctions dérivables. On a alors, pour tout réel x

$$\begin{aligned}
\mathrm{th}'(x) &= \frac{\mathrm{sh}'(x)\,\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}'(x)}{(\mathrm{ch}(x))^2} \\
&= \frac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)}
\end{aligned}$$

On remarque également que $\dfrac{\mathrm{ch}^2(x) - \mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \dfrac{\mathrm{sh}^2(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} = 1 - \mathrm{th}^2(x)$.
Puisque $\mathrm{th}' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2} > 0$, on en déduit que la fonction th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $\mathrm{th}(0) = 0$, on obtient que th est négative sur $\mathbb{R}^-$ et positive sur $\mathbb{R}^+$.
Enfin, pour limite, il suffit de factoriser :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x(1 - e^{-2x})}{e^x(1 + e^{-2x})} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^{2x} - 1)}{e^{-x}(e^{2x} + 1)} = -1$$

VIII. Plan d'étude d'une fonction

1) Méthode générale

Méthode 6 :
Pour étudier une fonction, on effectue les étapes suivantes :

① On détermine le domaine de définition de la fonction f.

② On détermine les symétries éventuelles (parité, périodicité) afin de réduire l'intervalle d'étude.

③ On détermine les limites et asymptotes.

④ On détermine la dérivée (si elle existe) et on étudie son signe.

⑤ On dresse son tableau de variations complet, pour en déduire les extrema éventuels.

⑥ On trace la courbe représentative de la fonction.

2) Exemple

Exemple 20. — Etudier et construire la courbe de la fonction $f : x \longmapsto x^2 e^{-x^2}$.

Solution. La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Remarquons que, pour tout réel x :

$$f(-x) = (-x)^2 e^{-(-x)^2} = x^2 e^{-x^2} = f(x)$$

La fonction f est donc paire. Il suffit donc d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}^+$ puis de conclure par parité.

Pour les limites, constatons (en posant $X = x^2$)

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 e^{-x^2} = \lim_{X\to+\infty} X e^{-X} = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Par parité, on en déduit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (produit de fonctions usuelles), et on a, pour tout réel x

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x^2} + x^2(-2xe^{-x^2}) \\ &= 2xe^{-x^2}\left(1 - x^2\right) \\ &= 2xe^{-x^2}(1-x)(1+x) \end{aligned}$$

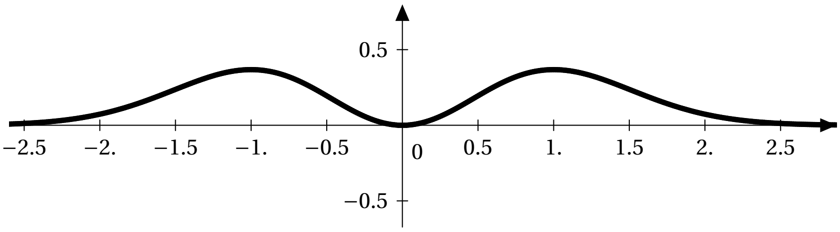
On obtient ainsi le tableau de signe de f' suivant :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

On obtient le tableau de variations suivant pour f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

et la courbe représentative suivante :



Exercices

Généralités

Exercice 7. — Résoudre les équations suivantes :

1. $(E_1) : x^4 + x^2 - 2 = 0$
2. $(E_2) : \exp(2x) + \exp(x) - 6 = 0$
3. $(E_3) : \ln(x)^2 + 2\ln(x) - 3 = 0$.
4. $(E_4) : x = \sqrt{x} + 2$
5. $(E_5) : e^x + e^{-x} = 2$

Solution.

Méthode 7 :
Dans le cas d'équation proche d'une équation du second degré, on change de variable inconnue pour se ramener à une équation de ce type.

1. On pose $X = x^2$. (E_1) s'écrit alors $X^2 + X - 2 = 0$.
Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4 \times 1 \times -2 = 9$, et le trinôme possède donc deux solutions : $X_1 = \frac{-1-3}{2} = -2$ et $X_2 = \frac{-1+3}{2} = 1$.
On revient à l'inconnue de départ. Nous avons donc $X = 1$ soit $x^2 = 1$, ce qui nous donne finalement deux solutions : $x = 1$ ou $x = -1$:
$$\boxed{\mathscr{S} = \{-1; 1\}}$$
2. (E_2) s'écrit également $(e^x)^2 + e^x - 6 = 0$. On pose $X = e^x$. (E_2) devient alors $X^2 + X - 6 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions, qui sont -3 et 2.
On revient à l'inconnue de départ : nous avons donc $e^x = -3$, ce qui est impossible, ou $e^x = 2$ soit $x = \ln(2)$. Ainsi :
$$\boxed{\mathscr{S} = \{\ln(2)\}}$$
3. On pose $X = \ln(x)$. (E_3) devient $X^2 + 2X - 3 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -3 et 1.
On revient à l'inconnue de départ : on a donc $\ln(x) = -3$, soit $x = e^{-3}$, ou $\ln(x) = 1$, soit $x = e$. Ainsi :
$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{e^{-3}; e\right\}}$$
4. On constate que (E_4) s'écrit $(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} - 2 = 0$. On pose alors $X = \sqrt{x}$. (E_4) s'écrit alors $X^2 - X - 2 = 0$. Ce trinôme possède deux solutions : -1 et 2.
On revient à l'inconnue de départ : $\sqrt{x} = -1$, ce qui est impossible, ou $\sqrt{x} = 2$, c'est-à-dire $x = 4$. Ainsi
$$\boxed{\mathscr{S} = \{4\}}$$
5. (E_5) s'écrit également $(e^x)^2 + 1 - 2e^x = 0$ en multipliant par $e^x \neq 0$. On pose alors $X = e^x$. (E_5) s'écrit alors $X^2 - 2X + 1 = 0$ qui possède une unique solution : 1.
On revient à l'inconnue de départ : $e^x = 1$, c'est-à-dire $x = 0$. Ainsi
$$\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$$

Exercice 8. — Résoudre les inégalités suivantes :

1. $(2x+1)(3x-1) > 0$
2. $\dfrac{4x+3}{2x+1} \geqslant 0$
3. $\dfrac{1-2x}{x+1} > 0$
4. $5x^2 - 10x + 4 \leqslant 0$
5. $\ln(2x+1) \leqslant \ln(x+7)$
6. $2x^3 + 2x \leqslant -2x$
7. $2^x \geqslant 3^{x-1}$

Solution.

Méthode 8 :
Dans la plupart des cas, pour déterminer le signe d'une expression, on essaie de factoriser au maximum puis de faire un tableau de signe.

1. On dresse le tableau de signe :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+1)(3x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi,
$$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{3}; +\infty\right[$$

2. On dresse le tableau de signe, en oubliant pas les doubles barres en cas de non-définition.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{4}$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x+3$		$-$	0	$+$		$-$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{4x+3}{2x+1}$		$+$	0	$-$	$\vert\vert$	$+$	

Ainsi,
$$\mathscr{S} = \left]-\infty; -\frac{3}{4}\right] \cup \left]-\frac{1}{2}; +\infty\right[$$

3. On dresse le tableau de signe.

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$1-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1-2x}{x+1}$		$-$	$\vert\vert$	$+$	0	$-$	

Ainsi,
$$\mathscr{S} = \left]-1; \frac{1}{2}\right[$$

4. Pour les trinômes du second degré, on dispose d'un théorème. Le discriminant ici vaut $\Delta = 20$, donc le trinôme dispose de deux racines : $x_1 = \dfrac{10-\sqrt{20}}{10}$ et $x_2 = \dfrac{10+\sqrt{20}}{10}$. Ainsi, puisque $5 >$

0, on dispose du tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		x_1		x_2	
$5x^2-10x+4$		$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi

$$\mathscr{S}=[x_1;x_2]$$

5. L'équation n'a de sens que si $2x+1>0$ et $x+7>0$, c'est-à-dire $x>-\frac{1}{2}$ et $x>-7$. On se place donc sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$. Par stricte croissance de la fonction logarithme :

$$\ln(2x+1)\leqslant\ln(x+7)\Leftrightarrow 2x+1\leqslant x+7\Leftrightarrow x\leqslant 6$$

Ainsi,

$$\mathscr{S}=\left]-\frac{1}{2};6\right]$$

6. On a

$$2x^3+2x\leqslant -2x\Leftrightarrow 2x^3+4x\leqslant 0\Leftrightarrow 2x(x^2+2)\leqslant 0$$

$x^2+2>0$ pour tout réel x, donc ce produit est du signe de $2x$. Ainsi

$$\mathscr{S}=\mathbb{R}^-$$

7. Les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$2^x\geqslant 3^{x-1}\Leftrightarrow \mathrm{e}^{x\ln(2)}\geqslant \mathrm{e}^{(x-1)\ln(3)}$$

et par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$:

$$2^x\geqslant 3^{x-1}\Leftrightarrow x\ln(2)\geqslant (x-1)\ln(3)$$

soit

$$2^x\geqslant 3^{x-1}\Leftrightarrow x(\ln(2)-\ln(3))\geqslant -\ln(3)\Leftrightarrow x\leqslant\frac{-\ln(3)}{\ln(2)-\ln(3)}=\frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)}\text{ car }\ln(2)-\ln(3)<0$$

Ainsi

$$\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{\ln(3)}{\ln(3)-\ln(2)}\right]$$

Exercice 9. — Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f:x\longmapsto\frac{\sqrt{2x+1}}{x^2+5x+6}\qquad g:x\longmapsto\ln\left(2x^2+2x-12\right)$$

Solution.

Méthode 9 :
Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, on détermine toutes les conditions d'existence (racine, dénominateur, logarithme,...). On conclut ensuite.

Pour la fonction f, nous avons deux conditions :

- $\sqrt{2x+1}$ n'est défini que si $2x+1>0$ soit $x>-\frac{1}{2}$.
- Le quotient n'a un sens que si $x^2+5x+6\neq 0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta=1$. Ce trinôme

possède donc deux racines : $x_1 = \frac{-5-1}{2} = -3$ et $x_2 = \frac{-5+1}{2} = -2$. Il faut donc également que $x \neq -2$ et $x \neq -3$.

Bilan : la fonction f est donc définie sur $\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$.

Pour la fonction g, celle-ci n'est définie que si $2x^2+2x-12>0$. Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 100$. Le trinôme possède donc deux racines, $x_1 = \frac{-2-10}{4} = -3$ et $x_2 = \frac{-2+10}{4} = 2$. Ainsi, nous avons le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-3		2	
$2x^2+2x-12$		$+$	0	$-$	0	$+$

Ainsi,

$$\mathscr{D}_g =]-\infty;-3[\cup]2;+\infty[$$

Exercice 10. — Déterminer la parité des fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1} \qquad g : x \longmapsto \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad h : x \longmapsto x(x^2+2)^3(e^{x^2+1}+3)$$

Solution.

Remarque. — On détermine d'abord le domaine de définition, avant de déterminer sa parité.

1. Puisque, pour tout réel x, $x^2+1>0$ et $x^4+1>0$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout réel x,

$$f(-x) = \frac{\ln((-x)^2+1)}{(-x)^4+1} = \frac{\ln(x^2+1)}{x^4+1} = f(x)$$

   Ainsi, la fonction f est paire.

2. g n'est définie que si le quotient est strictement positif. Dressons le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		1	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$
$\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$

   Ainsi, g est définie sur $]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, qui est bien symétrique par rapport à 0. Enfin, pour tout $x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$:

$$g(-x) = \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right) = \ln\left(\frac{-(x-1)}{-(x+1)}\right) = \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = -\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = -g(x)$$

   Ainsi, g est une fonction impaire.

3. La fonction h est clairement définie sur $\mathbb{R}$, qui est symétrique par rapport à 0, et on a

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\quad h(-x) = (-x)((-x)^2+2)^3(e^{(-x)^2+1}+3) = -x(x^2+2)^3(e^{x^2+1}+3) = -h(x)$$

   Ainsi, h est impaire.

Exercice 11. — Soit $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout entier x par $f(x) = (-1)^x$. Déterminer l'image de la fonction f, $f(\mathbb{Z})$. Déterminer l'image réciproque par f de $\{1\}$.

Solution. Par définition, f prend deux valeurs : 1 et -1. Donc

$$f(\mathbb{Z}) = \{-1;1\}$$

Enfin, l'image réciproque de 1 est composé de tous les éléments de $\mathbb{Z}$ ayant pour image 1, c'est-à-dire les nombres pairs. Ainsi, $f^{-1}(\{1\}) = 2\mathbb{Z}$.

Exercice 12. — Soit (E) : $mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ où x et m sont des réels.

1. Soit m fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue x.
2. Soit x fixé. Résoudre l'équation (E) d'inconnue m.

Solution.

1. Pour m fixé **non nul**, il faut donc résoudre l'équation du second degré $mx^2 + x(2m-1) - 2 = 0$ d'inconnue x. Son discriminant vaut

$$\Delta = (2m-1)^2 - 4m(-2) = 4m^2 - 4m + 1 + 8m = 4m^2 + 4m + 1 = (2m+1)^2$$

L'équation possède donc deux solutions :

$$x_1 = \frac{-(2m-1)-(2m+1)}{2m} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-(2m-1)+(2m+1)}{2m} = \frac{1}{m}$$

Ainsi,

$$\mathscr{S} = \left\{-2; \frac{1}{m}\right\}$$

Si $m = 0$ l'équation devient $-x-2=0$ qui admet -2 comme unique solution.

Bilan : si $m \neq 0$, alors $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-2; \frac{1}{m}\right\}}$, et si $m = 0$, $\boxed{\mathscr{S} = \{-2\}}$.

2. Pour x fixé, c'est une équation du premier degré en m. Ainsi

$$\text{(E)} \Longleftrightarrow m(x^2 + 2x) = 2 + x$$

Soit $m(x(x+2)) = x+2$. Si $x \neq 0$ et $x \neq -2$ alors, on dispose d'une unique solution :

$$\frac{x+2}{x(x+2)} = \frac{1}{x}$$

Si $x = 0$, l'équation (E) devient $-2 = 0$ ce qui est absurde, donc l'équation n'admet aucune solution.
Si $x = 2$, l'équation (E) devient $4m + 4m - 2 - 2 = 0$, soit $m = \frac{1}{2}$
Bilan : si $x = 0$, l'équation n'admet aucune solution. Sinon,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\frac{1}{x}\right\}}$$

Fonctions trigonométriques et hyperboliques

Exercice 13. — Déterminer

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) \qquad \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \arctan(\sqrt{3})$$

Solution. arcsin est à valeur dans $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Ainsi,

$$\arcsin\left(\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = -\frac{\pi}{4}$$

Puisque $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$, et que $\frac{\pi}{4} \in [0;\pi]$, on en déduit que $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$.
Enfin, $\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$ et donc $\arctan(\sqrt{3}) = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 14 (ATS 2008)**.** —

1. Montrer que pour tout entier naturel k,

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

2. En déduire la valeur de la somme

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

3. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

Solution. 1. Remarquons que, puisque $k \geqslant 0$, on a

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$$

On a alors

$$\tan(\arctan(k+1) - \arctan(k)) = \frac{\tan(\arctan(k+1)) - \tan(\arctan(k))}{1+\tan(\arctan(k))\tan(\arctan(k+1))} = \frac{k+1-k}{1+k(k+1)} = \frac{1}{1+k+k^2}$$

et donc

$$\tan(\arctan(k+1) - \arctan(k)) = \tan\left(\arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)\right)$$

Ainsi

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) + p\pi \textit{ avec } p \in \mathbb{Z}$$

Puisque $\arctan(k+1) - \arctan(k) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, on a $p = 0$ et donc

$$\arctan(k+1) - \arctan(k) = \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right)$$

2. Mais alors, d'après ce qui précède

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=0}^{n} \arctan\left(\frac{1}{1+k+k^2}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \arctan(k+1) - \arctan(k) \\ &= \arctan(n+1) - \arctan(0) \quad \text{par télescopage} \\ &= \arctan(n+1) \end{aligned}$$

3. Puisque $\lim_{n\to+\infty} \arctan(n+1) = \frac{\pi}{2}$, d'après le résultat précédent

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{\pi}{2}}$$

Études de fonctions

Exercice 15. — Etudier et représenter les fonctions suivantes :

$$f : x \longmapsto \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{et} \quad g : x \longmapsto x^{\frac{1}{x}}$$

Solution. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables (exp) dont le dénominateur ne s'annule pas. On a :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = 0 \quad \text{par quotient} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-x}} = 1 \quad \text{par quotient}$$

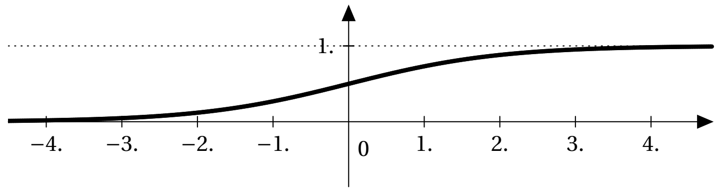
La courbe de f admet donc deux asymptotes horizontales, une d'équation $y = 0$ au voisinage de $-\infty$, et une d'équation $y = 1$ au voisinage de $+\infty$.
Pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x(e^x+1) - e^x(e^x)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^x}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$, et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On obtient le tableau de variations suivante :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

et la courbe représentative suivante :



$g : x \longmapsto e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln(x)}{x}$ et de l'exponentielle.

Par quotient, $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty$. Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

De même, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. Par composée,

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 1$$

Pour tout réel $x > 0$, on pose $u(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Par quotient,

$$u'(x) = \frac{\frac{1}{x}x - \ln(x)(1)}{x^2} = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$$

et par composée :

$$\begin{array}{rcl} g'(x) & = & u'(x)e^{u(x)} \\ & = & \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}e^{\frac{\ln(x)}{x}} \end{array}$$

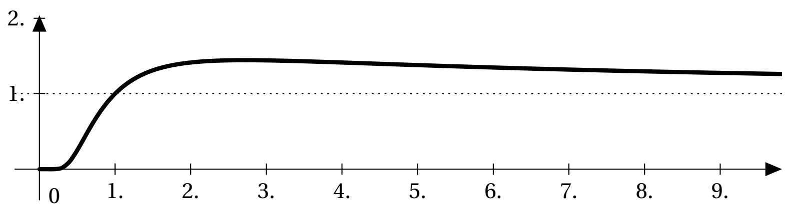
Puisque pour tout $x > 0$, $e^{\frac{\ln(x)}{x}} > 0$, g' est du signe de $\dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$, donc de $1-\ln(x)$. Or

$$\begin{array}{rcll} 1-\ln(x) > 0 & \Leftrightarrow & 1 > \ln(x) & \\ & \Leftrightarrow & e > x & \text{par stricte croissance de ln} \end{array}$$

avec $g(e) = e^{\frac{\ln(e)}{e}} = e^{\frac{1}{e}}$. Ainsi, on dispose du tableau de variation suivant :

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$e^{\frac{1}{e}}$	$\searrow$	1

et de la courbe représentative suivante :



Exercice 16. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2\sin(x) + x$.

1. Etudier f sur $[-\pi;\pi]$.
2. Montrer que la courbe de f est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\pi\\2\pi\end{pmatrix}$ (on montrera pour cela que pour tout réel x, $f(x+2\pi) = f(x)+2\pi$).
3. Représenter f sur $[-2\pi;4\pi]$.
4. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

Solution.

1. $[-\pi;\pi]$ est symétrique par rapport à 0. Pour tout réel $x \in [-\pi;\pi]$, on a

$$f(-x) = 2\sin(-x) - x = -2\sin(x) - x = -(2\sin(x)+x) = -f(x)$$

f est donc impaire. Etudions f sur $[0;\pi]$. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables, et on a pour tout $x \in [0;\pi]$

$$f'(x) = 2\cos(x) + 1$$

On a alors, sur $[0;\pi]$:

$$\begin{aligned} f'(x) > 0 &\Leftrightarrow 2\cos(x)+1>0 \\ &\Leftrightarrow \cos(x) > -\frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow x \in \left[0;\frac{2\pi}{3}\right] \end{aligned}$$

On obtient le tableau de variations suivant :

x	0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$+$		$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$	$\searrow$	π

et par imparité :

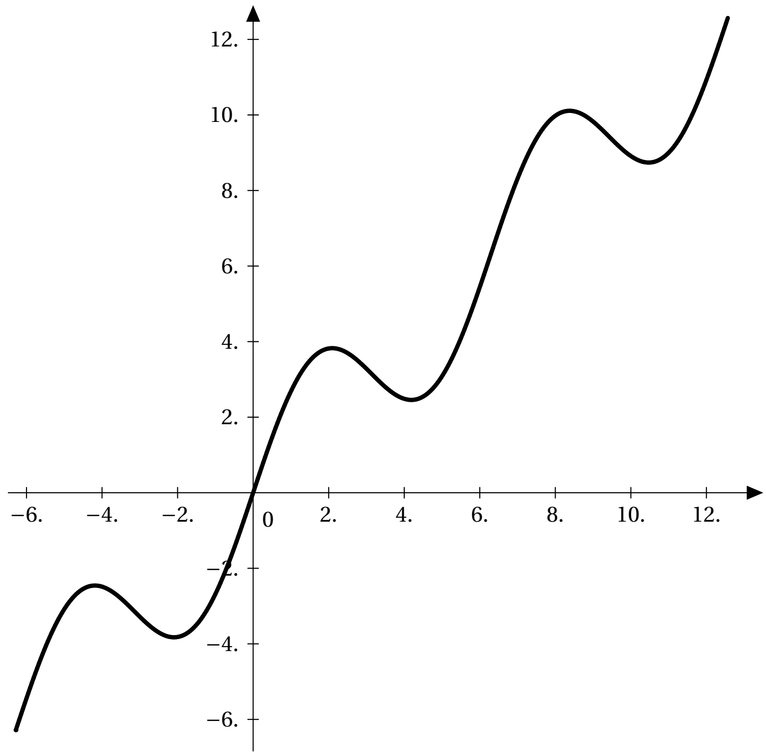
x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		0		$\frac{2\pi}{3}$		π
$f'(x)$		$-$		$+$		$+$		$-$	
$f(x)$	$-\pi$	$\searrow$	$-\sqrt{3}-\frac{2\pi}{3}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{3}+\frac{2\pi}{3}$	$\searrow$	π

2. Pour tout réel x, on a

$$f(x+2\pi) = 2\sin(x+2\pi) + x + 2\pi = 2\sin(x) + x + 2\pi = f(x) + 2\pi$$

Ainsi, la courbe de f est invariante par translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\pi\\2\pi\end{pmatrix}$.

3. En utilisant le tableau de variations sur $[-\pi;\pi]$, puis par translation, on obtient la courbe suivante sur $[-2\pi;4\pi]$.



4. Pour tout réel x, on a

$$-2 \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2 \quad \text{et donc} \quad -2+x \leqslant 2\sin(x) \leqslant 2+x$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} -2+x = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

De même, $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+x = -\infty$ et donc

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Exercice 17. — Montrer que pour tout réel $x \in [-1;1]$,

$$\arccos(x)+\arcsin(x) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \arccos(x)+\arccos(-x) = \pi$$

Solution.

Méthode 10 :
Lorsqu'on veut démontrer une égalité valable sur un certain intervalle, une méthode peut être d'étudier une fonction.

Soit $f : x \longmapsto \arccos(x)+\arcsin(x)$ définie sur $[-1;1]$. Par somme, f est dérivable sur $]-1;1[$ et on a

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

Ainsi, f est constante sur $]-1;1[$, et donc sur $[-1;1]$ par continuité de f. Or $f(0) = \arccos(0)+\arcsin(0) = \frac{\pi}{2}$.
Ainsi, pour tout réel $x \in [-1;1]$

$$\boxed{\arccos(x)+\arcsin(x) = \frac{\pi}{2}}$$

Soit $g : x \longmapsto \arccos(x)+\arccos(-x)$ définie sur $[-1;1]$. Par somme, g est dérivable sur $]-1;1[$ et on a

$$g'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + (-1)\frac{-1}{\sqrt{1-(-x)^2}} = 0$$

Ainsi, g est constante sur $]-1;1[$, et donc sur $[-1;1]$ par continuité de g. Or $g(0) = \arccos(0)+\arccos(0) = \pi$.
Ainsi, pour tout réel $x \in [-1;1]$

$$\boxed{\arccos(x)+\arccos(-x) = \pi}$$

Exercice 18. — Etudier la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \arccos(\cos(x))$.

Solution. f est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par parité et 2π-périodicité de cos, f est également paire et 2π-périodique. Il suffit donc d'étudier f sur $[0;\pi]$.
f est dérivable sur $]0;\pi[$ (puisque arccos n'est pas dérivable en 1 et -1) et on a, pour tout $x \in]0;\pi[$:

$$f'(x) = (-\sin(x))\frac{-1}{\sqrt{1-(\cos(x))^2}} = \sin(x)\frac{1}{\sqrt{\sin^2(x)}}$$

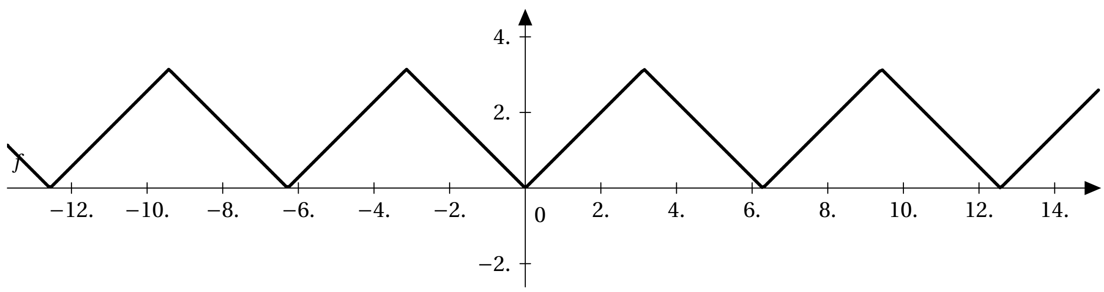
Or, sur $]0;\pi[$, $\sin(x) > 0$ donc $\sqrt{\sin^2(x)} = \sin(x)$. Ainsi

$$f'(x) = 1$$

f est donc une fonction affine sur $[0;\pi]$. En utilisant $f(0)$ et $f(\pi)$, on a alors

$$\forall\ x \in [0;\pi], \quad f(x) = x$$

En utilisant les résultats précédents, on obtient la courbe représentative suivante :



Exercice 19. — Soit $f : x \longmapsto x - [x]$. Etudier la monotonie de f. Que représente $f(x)$ pour un réel x? Représenter f.

Solution. La fonction n'est ni croissante, ni décroissante. En effet :

$$f(0) = 0 \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \qquad f(1) = 0$$

Donc $f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right)$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1)$.
Si $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ représente la partie décimale d'un nombre. Ainsi, pour tout entier k, la fonction est croissante sur $[k; k+1[$, $f(k) = 0$. Cela donne la courbe représentative suivante :