CHAPITRE 3

NOMBRES COMPLEXES

L'objectif de ce chapitre est de revoir et d'approfondir la notion de nombres complexes, utiles en mathématiques, mais également en physique.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① maîtriser la notion de conjugué pour mettre un quotient sous forme algébrique .... □

② maîtriser la notion de module, ainsi que les différentes propriétés .... □

③ connaître la notion d'exponentielle complexe :

- savoir mettre un nombre complexe sous forme exponentielle .... □
- savoir utiliser les propriétés de la forme expoentielle .... □

④ connaître la notion d'argument .... □

⑤ savoir résoudre une équation du second degré à coefficients complexes .... □

⑥ connaître l'ensemble $\mathbb{U}$ et savoir les représenter graphiquement .... □

⑦ connaître et maîtriser les liens entre trigonométrie et complexes .... □

⑧ connaître la méthode de l'angle moitié pour simplifier une expression du type $1+e^{i\theta}$ .... □

⑨ connaître les formules de Moivre et d'Euler. .... □

⑩ savoir déterminer alignements et colinéarité. .... □

⑪ savoir déterminer la racine d'un nombre complexe. .... □

⑫ connaître translation, rotation, homothétie et symétrie par rapport à l'axe des abscisses. .... □

I. Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes

1) Construction de $\mathbb{C}$

Définition 1. — On appelle **nombre complexe** z la donnée d'un couple (x, y) de nombres réels, que l'on note $z = x + iy$, avec $i^2 = -1$. Cette forme est appelée **forme algébrique**.

On note $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes.

Remarque 1. — Ainsi, $\mathbb{C} = \left\{x + iy, (x, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

En partant de résultat de Jérôme Cardan (1545) sur les équations de degré 3, Raffaelle Bombelli (1572) introduit $\sqrt{-121}$ pour simplifier des calculs. Il est ainsi le premier à utiliser les nombres complexes. Il a introduit également les premières règles (calculs, module, conjugué). Leonhard Euler, en 1777, propose l'utilisation de i pour $\sqrt{-1}$, du latin "imaginarius", et Karl Friedrich Gauss, en 1831, propose de les appeler les **nombres complexes**.

Définition 2. — Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $x, y \in \mathbb{R}^2$.

- le nombre x est appelé **partie réelle** de z, et est noté $x = \Re(z)$ ou $\mathrm{Re}(z)$.
- le nombre y est appelé **partie imaginaire** de z, et est noté $y = \Im(z)$ ou $\mathrm{Im}(z)$.
- Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont mêmes parties réelles et mêmes parties imaginaires.

⚠La partie imagine d'un nombre complexe est toujours réelle. Ainsi, $\mathrm{Im}(2 + 3i) = 3$.

Remarque 2. — Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$, avec $x, y \in \mathbb{R}^2$.

- z est réel si et seulement si $\Im(z) = 0$.
- si $\Re(z) = 0$, z s'écrit iy, et est dit **imaginaire pur**. On note $i\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres imaginaires purs.

2) Structures algébriques de $\mathbb{C}$.

L'idée est d'étendre les notions d'addition et multiplication connues sur $\mathbb{R}$.

Définition 3. — Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes (avec x, x', y, y' des réels).

- On note $z + z'$ par $z + z' = (x + x') + i(y + y')$.
- On note $zz' = (x \times x' - y \times y') + i(x \times y' + x' \times y)$.

Remarque 3. — Ainsi, on a les relations suivantes :

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') \quad \text{et} \quad \Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z')$$

Propriété 1. — *$\mathbb{C}$, muni de l'addition, vérifie les propriétés suivantes (avec z, z', z'' des nombres complexes) :*

- *Associativité de + :* $(z+z')+z'' = z+(z'+z'')$
- 0 *est le neutre de l'addition :* $0+z = z+0 = z$.
- $+$ *est commutative :* $z+z' = z'+z$.
- *opposé : tout nombre complexe z admet un opposé $z' = -z$, vérifiant* $z+z' = z'+z = 0$.

Cela fait de $(\mathbb{C},+)$ *un* ***groupe commutatif***.

Propriété 2. — *$\mathbb{C}$, muni de l'addition et de la multiplication, vérifie les propriétés suivantes :*

- *Associativité de × :* $(z\cdot z')\cdot z'' = z\cdot(z'\cdot z'')$.
- 1 *est le neutre de la multiplication :* $1\cdot z = z\cdot 1 = z$
- $\times$ *est commutative :* $z\cdot z' = z'\cdot z$.
- $\times$ *est distributive sur + :* $z\cdot(z'+z'') = z\cdot z' + z\cdot z''$.

Cela fait de $(\mathbb{C},+,\times)$ *un* ***anneau***.

Théorème 1. — *Soit $z \in \mathbb{C}^*$ (c'est-à-dire $z \neq 0$). On note $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}^2$. Alors*

$$z\cdot\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}\right) = 1$$

Le nombre complexe $\frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ est l'inverse de z, et est noté $\frac{1}{z}$.

Remarque 4. — Avec cette dernière propriété, on dit que $(\mathbb{C}, +, \times)$ forme un **corps commutatif**.

Propriété 3 (Identités remarquables)**.** — *On dispose de quatre identités remarquables dans* $\mathbb{C}$ *:*

$$(z_1+z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1\cdot z_2 + z_2^2, \qquad (z_1-z_2)^2 = z_1^2 - 2z_1\cdot z_2 + z_2^2$$

$$z_1^2 - z_2^2 = (z_1-z_2)(z_1+z_2), \qquad z_1^2 + z_2^2 = (z_1 - iz_2)(z_1+iz_2)$$

Exercice 1. — Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants

$$(2+3i)(1-2i), \qquad (2+i)^2, \qquad (-i)^{81}$$

Déterminer l'inverse de $1-i$, $-3+2i$.

Méthode 1 :
Pour calculer i^n on utilise les propriétés suivantes :

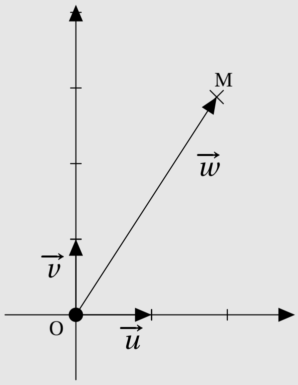
$$i^2 = -1,\ i^3 = -i \quad \text{et} \quad i^4 = 1$$

Méthode 2 :
Pour calculer l'inverse d'un nombre complexe $x+iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}^2$), on peut appliquer la formule, ou multiplier numérateur et dénominateur par $x-iy$, pour utiliser l'identité remarquable.

3) Nombres complexes et géométrie

On a défini un nombre complexe z par la donnée d'un couple (x, y) de deux réels, qui peut autant représenter un point qu'un vecteur de plan.

Définition 4. — On se place dans le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct.



- A tout point $\mathrm{M}(x; y)$ du plan, on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Le point M est dit d'**affixe** z, que l'on note $\mathrm{M}(z)$. Le point M est appelé l'**image** du nombre complexe z.
- De même, à tout vecteur $\vec{w}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, on associe le nombre complexe $z = x + iy$. Le vecteur $\vec{w}$ est dit d'**affixe** z, que l'on note $\vec{w}(z)$.

Lorsqu'on manipule des affixe, on appelle le plan $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$ le **plan complexe**.

Les propriétés géométriques du plan se transposent aisément aux affixes.

Propriété 4. — *Soient* A *et* B *deux points du plan* $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, *d'affixes respectives* z_A *et* z_B.

- *le vecteur* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *a pour affixe* $z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$.
- *le milieu du segment* $[\mathrm{AB}]$ *a pour affixe* $\frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}}{2}$.
- *l'affixe de la somme de deux vecteurs est la somme des affixes.*
- *si* $\vec{w}$ *a pour affixe* z, $k \cdot \vec{w}$ *a pour affixe* $k \cdot z$.
- *Si* C *est un point d'affixe* z_C *alors l'affixe du centre de gravité* G *est donné par* $z_\mathrm{G} = \frac{z_\mathrm{A}+z_\mathrm{B}+z_\mathrm{C}}{3}$.

Remarque 5. — On verra plus tard d'autres formules liant géométrie plane et nombres complexes : la formule de la distance, et de la mesure d'un angle orienté.

II. Conjugué d'un nombre complexe

1) Définitions et propriétés

Définition 5. — Soit $z = x + iy$ un nombre complexe, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On appelle **conjugué** de z, et on note $\overline{z}$ le nombre $\overline{z} = x - iy$.

Propriété 5. — *Soient z et z' deux nombres complexes. On a*

- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$.
- $\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$.
- *Si* $z' \neq 0$, $\overline{\frac{z}{z'}} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
- $z\overline{z} = \Re(z)^2 + \Im(z)^2$.

Remarque 6. — On dit que l'opérateur de conjugaison est **compatible** avec les opérations usuelles.

Propriété 6. — *Soit z un nombre complexe. Alors*

$$\Re(z) = \frac{z+\overline{z}}{2} \quad \text{et} \quad \Im(z) = \frac{z-\overline{z}}{2i}$$

2) Application aux quotients

On utilisera le nombre conjugué pour déterminer la forme algébrique d'un quotient.

Méthode 3 :
Soient z et z' deux nombres complexes, avec $z' \neq 0$. Pour déterminer la forme algébrique de $\frac{z}{z'}$, on utilise le résultat

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\overline{z}'}{z'\overline{z}'}$$

et on constate que $z'\overline{z}' \in \mathbb{R}$.

Exemple 1. — Déterminer la forme algébrique de $\frac{1+2i}{1-i}$ et $\frac{1}{i}$.

Exercice 2. — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $2iz+2 = -3z$.

III. Forme exponentielle

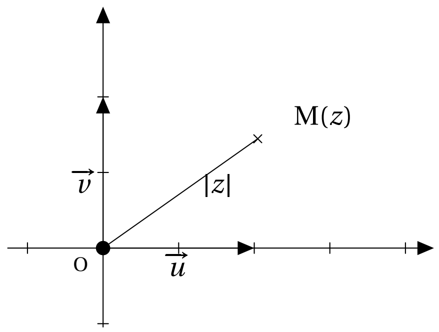
1) Module

Définition 6. — Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle **module** de z le réel positif

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}$$

Remarque 7. — Si $z \in \mathbb{R}$, alors le module de z est égale à sa valeur absolue. Cela explique ainsi la notation du module.

Remarque 8. — Géométriquement, en notant M le point d'affixe z dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$, alors $|z|$ représente la distance à l'origine OM.



Propriété 7. — *Pour tout nombre complexe z,* $z\overline{z} = |z|^2$.

Propriété 8. — *Soient z et z' deux nombres complexes.*

- $|zz'| = |z| \cdot |z'|$.
- *Si* $z' \neq 0$, $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$.
- $|-z| = |\overline{z}| = |z|$.

Proposition 1 (Inégalités triangulaires)**.** — *Soient z et z' deux nombres complexes. Alors*

$$|z+z'| \leqslant |z|+|z'| \quad et \quad \big||z|-|z'|\big| \leqslant |z-z'|$$

*et $|z+z'| = |z|+|z'|$ si et seulement s'il existe un réel k tel que $z = kz'$ ou $z' = kz$ (on dit que z et z' sont **linéairement liés**).*

2) Groupe des nombres complexes de module 1

a) Définitions

Définition 7. — On appelle **groupe des nombres complexes de module** 1, et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{Z},\ |z| = 1\}$$

Remarque 9. — On dit que $\mathbb{U}$ est un **groupe** car il est stable par multiplication, par passage à l'inverse, et il contient 1.

Proposition 2. — *$z \in \mathbb{U}$ si et seulement s'il existe un réel θ tel que $z = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Ainsi*

$$\mathbb{U} = \{\cos(\theta) + i\sin(\theta), \quad \theta \in \mathbb{R}\}$$

3) Exponentielle complexe

Notons $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ par $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$. Remarquons alors, en utilisant les propriétés d'addition des fonctions trigonométriques, que pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$:

Ainsi, la fonction f vérifie, pour tout $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$, $f(\theta + \theta') = f(\theta) f(\theta')$, propriété vérifiée également par la fonction exponentielle. Comme de plus, $f(0) = 1$, on notera alors :

Définition 8. — Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

Les propriétés vue précédemment s'écrivent alors :

Proposition 3. — *Pour tous* $(\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2$ *:*

① $e^{i0} = 1, e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ *et* $e^{i\pi} = -1$.

② $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$.

③ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \dfrac{1}{e^{i\theta}}$.

④ $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

⑤ $\forall\, n \in \mathbb{Z}, \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$.

⑥ $|e^{i\theta}| = 1$.

⑦ $e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Longleftrightarrow \theta = \theta' [2\pi]$.

Théorème 2 (Surjectivité de l'exponentielle complexe)**.** — *Pour tout* $z \in \mathbb{U}$*, il existe un réel* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$.

Remarque 10. — Le θ du théorème n'est pas unique. En effet, $\theta' = \theta + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est encore un réel vérifiant $e^{i\theta'} = z$.

Remarque 11. — On peut étendre la définition de l'exponentielle complexe à tout nombre complexe $z = a + ib$ (avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$), en posant

$$e^z = e^a e^{ib} = e^{\Re(z)} e^{i\Im(z)}$$

Exemple 2. — Si $z = 1 + i$, on alors

$$e^{1+i} = e^1 e^i = e(\cos(1) + i\sin(1))$$

4) Fonctions à valeurs complexes

Remarque 12. — Une fonction $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ peut s'écrire, pour tout réel $t \in \mathrm{I}$, $f(t) = g(t) + ih(t)$, avec $g, h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ ($g(t)$ représente la partie réelle de $f(t)$, et $h(t)$ représente la partie imaginaire).

Proposition 4. — *Soient* $g : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *et* $h : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{R}$ *deux fonctions dérivables. On introduit* $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie pour tout réel* $t \in \mathrm{I}$ *par* $f(t) = g(t) + ih(t)$.
Alors f *est dérivable sur* I *et pour tout réel* $t \in \mathrm{I}$,

$$f'(t) = g'(t) + ih'(t)$$

Remarque 13. — Ainsi, $f : \mathrm{I} \longrightarrow \mathbb{C}$ est dérivable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont dérivables sur I.

Exemple 3. — Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout réel t par $f(t) = e^{it}$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout réel t :

$$f'(t) = ie^{it}$$

Proposition 5. — *Soit une fonction* $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{C}$ *une fonction à valeur complexe. Alors* e^{φ} *est également dérivable sur* I *et on a*

$$(e^{\varphi})' = \varphi' e^{\varphi}$$

5) Argument d'un nombre complexe

Pour tout nombre complexe non nul z, on constate que

$$\left|\frac{z}{|z|}\right| = \frac{|z|}{|z|} = 1$$

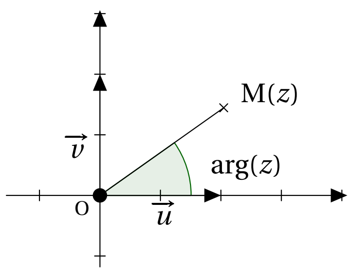
et donc $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$. D'après ce qui précède, par surjectivité de l'exponentielle complexe, il existe un réel θ tel que $\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$.

Définition 9. — On appelle **argument** d'un nombre complexe non nul z, et on note $\arg(z)$, tout nombre réel θ tel que

$$\frac{z}{|z|} = e^{i\theta}$$

L'argument n'est pas unique, mais est défini à un multiple entier de 2π près.
Le nombre 0 n'a pas d'argument.

Remarque 14. — $\arg(z)$ représente une mesure de l'angle $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$ où M est le point d'affixe z dans le plan complexe.



Les propriétés des arguments d'un nombre complexe sont similaires aux propriétés du logarithme :

Propriété 9. — *Soient* z *et* z' *deux nombres complexes non nuls. Alors*

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \quad [2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) \quad ([2\pi]$.
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') \quad [2\pi]$.
- $\arg\left(\overline{z}\right) = -\arg(z) \quad [2\pi]$.
- *Pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}^*$, $\arg(z^n) = n\arg(z) \quad [2\pi]$.
- $\arg(z) = 0 \quad [2\pi] \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$.
- $\arg(z) = \pi \quad [2\pi] \Longleftrightarrow z \in \mathbb{R}_-^*$.
- $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \quad [\pi] \Longleftrightarrow z \in i\mathbb{R}^*$.

Démonstration. Ces propriétés découlent des propriétés de l'exponentielle. □

Définition 10 (Forme trigonométrique et exponentielle). — Tout nombre complexe non nul z s'écrit

$$\begin{aligned} z &= r(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) && \textit{forme trigonométrique} \\ &= re^{i\theta} && \textit{forme exponentielle} \end{aligned}$$

où θ est un argument de z et $r = |z|$

Exemple 4. — On a, par exemple

$$2i = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} \quad \text{et} \quad -3 = 3(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = 3e^{i\pi}$$

Remarque 15. — Tout point M d'affixe $z = re^{i\theta}$ du plan, distinct de l'origine, est donc repéré de manière unique par la donnée de $r = |z|$ et d'un argument de z, θ. Les coordonnées (r, θ) sont appelées **coordonnées polaires** du point M.

Méthode 4 :
Pour déterminer la forme exponentielle d'un nombre complexe non nul $z = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on calcule son module, puis on cherche θ tel que

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Exemple 5. — Déterminer la forme exponentielle de $1 + i$.

Exercice 3. — Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$① \ \sqrt{6} + i\sqrt{2}, \quad ② \ -\sqrt{3} + i, \quad ③ \ \left(\frac{-\sqrt{3} + i}{1 + i}\right)^4, \quad ④ \ \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2016}$$

Conséquence 1. — On peut convertir une expression du type $a\cos(t)+b\sin(t)$ sous la forme $A\cos(t-\varphi)$. En effet, notons $z=a+ib$. On écrit z sous forme exponentielle $z=Ae^{i\varphi}$, avec $A=\sqrt{a^2+b^2}$ et φ un argument de z. On a donc

$$\cos(\varphi)=\frac{a}{A} \quad \text{et} \quad \sin(\varphi)=\frac{b}{A}$$

Mais alors

$$\begin{aligned} e^{it}Ae^{-i\varphi} &= (A\cos(t)\cos(\varphi)+A\sin(t)\sin(\varphi))+i(-A\cos(t)\sin(\varphi)+A\sin(t)\cos(\varphi)) \\ &= (a\cos(t)+b\sin(t))+i(-b\cos(t)+a\sin(t)) \end{aligned}$$

Ainsi, $a\cos(t)+b\sin(t)=\Re(e^{it}Ae^{i\varphi})=\Re(Ae^{i(t-\varphi)})=A\cos(t-\varphi)$.

Remarque 16. — La méthode est à connaitre, et non pas la formule complète.

Exemple 6. — Ecrire, pour tout réel t, $\sqrt{3}\cos(t)+\sin(t)$ sous la forme $A\cos(t+\varphi)$.

Proposition 6. — *Soit $z=a+ib$ (avec $a\neq 0$) un complexe non imaginaire pur. Alors*

$$\arg(z)=\begin{cases}\arctan\left(\frac{b}{a}\right) & \text{si } a>0\\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi & \text{si } a<0\end{cases}$$

IV. Racines complexes

1) Racines n-ièmes d'un nombre complexe

Définition 11. — Soient u un nombre complexe non nul, et n un entier naturel non nul. On appelle **racines n-ièmes de u** toutes les solutions de l'équation $z^n=u$ d'inconnue z.

Méthode 5 :
Pour déterminer les racines d'un nombre complexe non nul u, on utilise la forme exponentielle. On conclura alors en constatant que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même module, et même argument à un multiple de 2π près.

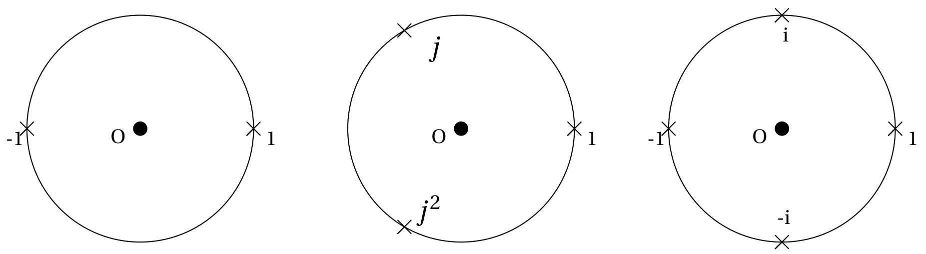
Exemple 7. — Déterminer les racines carrées de $\sqrt{3}+i$.

2) Racines de l'unité

Définition 12 (Cas particulier)**.** — On appelle **racines n-ièmes de l'unité** toutes les solutions de l'équations $z^n = 1$. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

Exemple 8 (Fondamental)**.** — Soit n un entier non nul. Déterminer les racines n-ièmes de l'unité.

Remarque 17. — Pour tout entier n non nul, $\mathbb{U}_n$ contient 1, et est stable par multiplication et par passage à l'inverse. $\mathbb{U}_n$ est donc un groupe pour la multiplication.
Dans le plan complexe, les points d'affixe $z \in \mathbb{U}_n$ forment un polygone régulier à n côtés, inscrit dans le cercle trigonométrique, et dont l'un des sommets est le point d'affixe 1.



Cas $n = 2$ Cas $n = 3$ Cas $n = 4$

Dans le cas $n = 2$, on a $\mathbb{U}_2 = \{1; -1\}$, dans le cas $n = 3$, on a $\mathbb{U}_3 = \{1; j; j^2\}$ où $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Enfin, dans le cas $n = 4$, $\mathbb{U}_4 = \{1; i; 1; -i\}$.

Remarque 18. — On peut se ramener aux racines de l'unité dans le cas général. En effet, si on doit résoudre $z^n = re^{i\theta}$, on constate que

$$z^n = \left(r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n \quad \text{soit} \quad \left(zr^{-\frac{1}{n}} e^{-i\frac{\theta}{n}}\right)^n = 1$$

On conclut en disant que $zr^{-\frac{1}{n}} e^{-i\frac{\theta}{n}} \in \mathbb{U}_n$.

Proposition 7. — *Soit $\omega \neq 1$ une racine n-ième de l'unité. Alors*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega^k = 1 + \omega + \omega^2 + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

3) Racines carrées d'un nombre complexe

Pour déterminer la solution de l'équation $z^2 = a + ib$, on peut utiliser la méthode précédente (forme exponentielle), mais on peut également le faire avec la forme algébrique.

Méthode 6 :
On cherche les solutions z de l'équation $z^2 = a + ib$ avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

① On écrit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et on détermine z^2. On obtient alors $x^2 - y^2 + 2xyi = a + ib$.

② On considère les parties réelles et imaginaires pour déterminer deux équations.

③ On utilise une troisième équation, en constatant que $|z|^2 = |a+ib|$, c'est-à-dire $x^2+y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

④ On résout le système des 3 équations précédentes, sachant qu'une de ces équations permet d'éliminer certaines solutions.

Exemple 9. — Déterminer les racines carrées de $3 - 4i$.

Exercice 4. — Déterminer les racines carrées de i, -9, et $1 + 2i$.

Remarque 19. — De manière générale, si $a \in \mathbb{R}^-$, les racines carrées de a sont $i\sqrt{-a}$ et $-i\sqrt{-a}$.

4) Equation du second degré à coefficients complexes

Théorème 3. — *Soient a, b et c trois nombres complexes, avec $a \neq 0$. Les racines de $az^2 + bz + z$ sont*

$$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b+\delta}{2a} \quad \text{où} \quad \delta^2 = \Delta = b^2 - 4ac$$

*Δ étant appelé le **déterminant**.*
*Si $\Delta = 0$, il y a une unique racine, appelée **racine double**.*

Si a, b et c sont réels, on obtient les résultats vus dans les classes précédentes :

- *Si $\Delta > 0$, les deux solutions sont réelles.*
- *Si $\Delta < 0$, les solutions sont deux complexes conjuguées.*

Exemple 10. — Résoudre l'équation $z^2 - iz - 1 + i = 0$.

Exercice 5 (Important)**.** — Résoudre l'équation $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$, avec $\theta \in \mathbb{R}$.

V. Lien entre complexes et trigonométrie

1) Formules d'Euler

En reprenant la notation exponentielle, on constate que, pour tout réel θ,

$$\cos(\theta) = \Re(\mathrm{e}^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \Im(\mathrm{e}^{i\theta})$$

On dispose ainsi des formules suivantes :

Proposition 8 (Formules d'Euler)**.** — *Pour tout réel* θ*,*

$$\cos(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} + \mathrm{e}^{-i\theta}}{2} \quad \textit{et} \quad \sin(\theta) = \frac{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}}{2i}$$

2) Formule de Moivre

La formule de Moivre permet de calculer facilement la puissance n-ième d'un nombre complexe en utilisant la formule trigonométrique.

Proposition 9 (Formule de Moivre)**.** — *Pour tout réel* θ*, et pour tout entier* $n \in \mathbb{Z}$*, on a*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

3) Application à la linéarisation

Selon certains cas (en physique par exemple), il peut arriver qu'on ait besoin de transformer des puissances de cos et sin en une somme de multiples de cos et sin, en utilisant les deux formules précédentes : on dit qu'on **linéarise** l'expression.

Exemple 11. — Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour calculer cette intégrale, on va linéariser $\sin^3$.

Méthode 7 :
Pour linéariser une expression trigonométrique :

① on transforme les termes cos et sin en exponentielles complexes, en utilisant les formules d'Euler.

② on développe les expressions (à l'aide de la formule du binôme de Newton) et on simplifie en utilisant les propriétés de l'exponentielle complexe.

③ on applique les formules d'Euler pour transformer les exponentielles complexes restantes en cos et sin.

Exemple 12. — Linéariser $\cos^2(x)$.

Exercice 6. — Calculer l'intégrale précédente : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x)\,\mathrm{d}x$.

Méthode 8 :
Lorsqu'on cherche à transformer une formule linéarisée, on utilise $e^{in\theta} = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$ et on développe.

Exemple 13. — Ecrire $\cos(3x)$ sous la forme d'un polynôme en $\cos(x)$.

Méthode 9 :
Lorsqu'on veut factoriser des expressions du type $e^{i\theta} + e^{i\theta'}$, on met en facteur $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$ et on utilise les formules d'Euler.

Exemple 14 (Exemple important)**.** — Factoriser $1 + e^{i\theta}$ et $1 - e^{i\theta}$.

VI. Complexes et géométrie

Les nombres complexes sont très liés à la géométrie. On va ainsi pouvoir identifier certaines transformations du plan à l'aide d'une application complexe.

Dans l'ensemble de cette partie, on se place dans un plan complexe $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1) Distances et angles

Propriété 10. — *Soient* A *et* B *deux points distincts du plan, d'affixes respectives* z_A *et* z_B. *Alors*

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = |z_B - z_A|$$

Ainsi

- *L'ensemble des points* M *d'affixe* z *du plan vérifiant* $|z - z_A| = r$ *(où* $r > 0$*) est le cercle, de centre* A *et de rayon* r.
- *L'ensemble des points* M *d'affixe* z *vérifiant* $|z - z_A| = |z - z_B|$ *est la médiatrice du segment* [AB].
- *Le triangle* MAB *est rectangle en* M *si et seulement si* $|z_A - z_B|^2 = |z - z_A|^2 + |z - z_B|^2$.

Propriété 11. — *Soient* A, B, C *et* D *quatre points d'affixe respective* z_A, z_B, z_C *et* z_D, *avec* A *distinct de* B *et* C *distinct de* D. *Alors*

$$(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \quad [2\pi]$$

Ainsi,

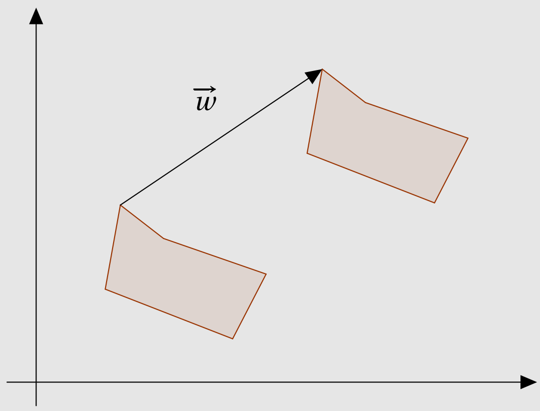
- (AB) *est parallèle à* (CD) *si et seulement si* $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ *est réel.*
- (AB) *est perpendiculaire à* (CD) *si et seulement si* $\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ *est imaginaire pur.*

2) Transformations du plan

a) Translation

Les transformations du plan classique (translation, rotation, homothétie et symétrie par rapport à l'axe des abscisses) se traduisent aisément avec les nombres complexes. On rappelle qu'on se place dans le plan complexe $(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v})$.

Rappel 1. — *Soit $\vec{w}$ un vecteur. On appelle* ***translation*** *de vecteur $\vec{w}$ la transformation du plan qui, à tout point* M*, associe le point* M′ *tel que* $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \vec{w}$.



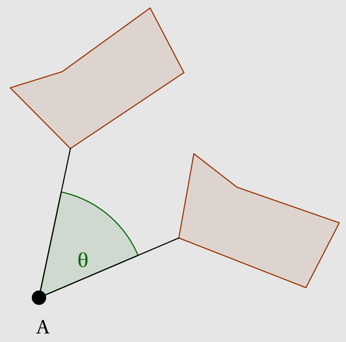
Proposition 10. — *Soit $\vec{w}$ un vecteur d'affixe a. L'image du point* M*, d'affixe z, par la translation de vecteur $\vec{w}$ est le point* M′ *d'affixe $z' = z + a$.*

Remarque 20. — Une translation préserve les distances et les angles. Une translation de vecteur non nul n'admet pas de point invariant.

b) Rotation

Définition 13. — Soit A un point du plan, et θ un réel. On appelle **rotation** de centre A et d'angle θ la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M′ tel que

$$\begin{cases} \mathrm{AM'} = \mathrm{AM} \\ (\overrightarrow{\mathrm{AM}}; \overrightarrow{\mathrm{AM'}}) = \theta \ [2\pi] \end{cases} \text{si } \mathrm{M} \neq \mathrm{A}, \quad \mathrm{M'} = \mathrm{A} \text{ si } \mathrm{M} = \mathrm{A}$$



Proposition 11. — *Soit* A *un point du plan d'affixe* a*, et* θ *un réel. L'image du point* M *d'affixe* z *par la rotation de centre* A *et d'angle* θ *est le point* M′ *d'affixe* z' *tel que*

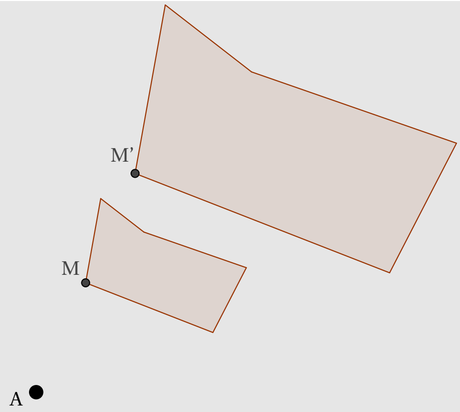
$$z' - a = e^{i\theta}(z - a)$$

En particulier, si le centre est l'origine O : $z' = e^{i\theta}z$.

Remarque 21. — Une rotation préserve les distances et les angles. Si l'angle θ est non nul, la rotation d'angle θ admet un unique point fixe, son centre.

c) Homothétie

Définition 14. — Soit A un point du plan, et $k \in \mathbb{R}^*$. On appelle **homothétie** de centre A et de rapport k la transformation du plan qui, à tout point M, associe le point M′ du plan tel que $\overrightarrow{AM'} = k\overrightarrow{AM}$.



Proposition 12. — *Soit* A *un point du plan d'affixe* a, *et* $k \in \mathbb{R}^*$. *L'image du point* M, *d'affixe* z *par l'homothétie de centre* A *et de rapport* k *est le point* M′ *d'affixe* z' *tel que*

$$z' - a = k(z - a)$$

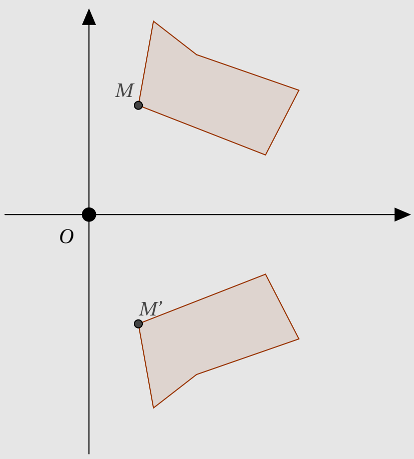
Remarque 22. — Une homothétie préservent les angles, mais pas les distances. En effet, une longueur est multipliée par $|k|$. Elle admet un unique point fixe, son centre.

Propriété 12. — *Soit* ω *un nombre complexe. L'application* $z \longmapsto \omega z$ *est la composée de deux applications : l'homothétie, de centre* O *et de rapport* $|\omega|$, *et la rotation de centre* O *et d'angle* $\arg(\omega)$.

d) Symétrie par rapport à l'axe des abscisses

Proposition 13. — *L'image du point* M, *d'affixe* z, *par la symétrie par rapport à l'axe des abscisses est le point* M′ *d'affixe* z' *tel que*

$$z' = \overline{z}$$



Remarque 23. — Une symétrie axiale conservent les distances, mais renversent l'orientation (elle transforme un angle orienté en son opposé). L'ensemble de ses points fixes est son axe de symétrie.

Exercices

Généralités

Exercice 7 (Forme algébrique). — Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$\frac{2+i}{1-2i} \qquad \frac{1+i}{1+2i}+\frac{1-i}{1-2i} \qquad e^{-i\frac{\pi}{2}} \qquad e^{\pi} \qquad \frac{4+3i}{i-3}$$

Exercice 8 (Forme exponentielle). — Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

$$\sqrt{3}+i \qquad \sqrt{6}-\sqrt{2}i \qquad -3-3i \qquad -3 \qquad \frac{-1-i}{\sqrt{3}-i} \qquad (1-i)^n \ (n\in\mathbb{Z})$$

Exercice 9 (Calcul de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$). — On note $z=1+i$ et $z'=\sqrt{3}+i$. En exprimant $\frac{z}{z'}$ sous forme algébrique et exponentielle, déterminer les valeurs de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

Exercice 10 (Identité du parallélogramme). — Montrer que, pour tous nombres complexes z et z' on a

$$|z+z'|^2+|z-z'|^2=2(|z|^2+|z'|^2)$$

Interpréter géométrique.

Racines n-ièmes

Exercice 11 (ATS 2010). — Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\dfrac{1}{z^2}+z^2+1=0$.

Exercice 12 (BTS-DUT 2011). — Soit n un entier naturel non nul. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation

$$(z-1)^n=(z+1)^n$$

Exercice 13 (ATS 2014). — Déterminer les racines cubiques de $-i$.

Exercice 14 (ATS 2009). — Déterminer les racines carrées du nombre $-7+5i$.

Trigonométrie

Exercice 15 (ATS 2009). — Calculer, pour $\theta\in\mathbb{R}$

$$\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}\sin(\theta p)$$

Exercice 16. — Déterminer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(3x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice 17 (ATS 2014)**.** — Pour $n \in \mathbb{N}$, et $x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, on pose

$$\mathrm{T}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{2ikx} \quad \text{et} \quad \mathrm{S}_n(x) = 2\Re(\mathrm{T}_n(x)) - 1$$

1. Calculer $\mathrm{T}_n(x)$, en déduire que

$$\Re(\mathrm{T}_n(x)) = \cos(nx)\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)}$$

2. Montrer que

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin(x)} = 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\cos(2kx)$$

Géométrie

Exercice 18. — Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z telle que

$$|z-2i| = 2 \qquad |z-1+i| < 2 \qquad |z+2-i| = |z-1-i| \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \qquad \arg\left(\frac{z-1}{z-i}\right) = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$$

Exercice 19 (ATS 2014)**.** — Soit (ABC) un triangle, et $p \in]0;1[$. On considère les points A', B' et C' définis par

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{AA}'} = p\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{BB}'} = p\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ \overrightarrow{\mathrm{CC}'} = p\overrightarrow{\mathrm{CA}} \end{cases}$$

Dans le plan complexe, on note a, b et c les affixes des points respectifs A, B, C et a', b' et c' les affixes des points respectifs A', B' et C'.
On note $\omega = \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que $\omega^3 = 1$, $1+\omega+\omega^2 = 0$ et $\omega^2 = \overline{\omega}$.
2. Déterminer a', b' et c' en fonction de a, b, c et p.
3. Démontrer que (ABC) et $(\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}')$ ont le même centre de gravité.

Exercice 20. — Soit A le point d'affixe 1 du plan complexe. On considère la transformation du plan f qui, à tout point M d"affixe z, et distinct de A, associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{1-z}{\overline{(z)}-1}$$

1. Déterminer l'ensemble des antécédents de A par f.
2. Calculer $|z'|$.
3. Démontrer que, pour tout point $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$, A, M et M' sont alignés.
4. En déduire une méthode de construction du point M'.

Exercice 21. — Soit n un entier $n \geqslant 3$. Pour tout entier $k \in \{0, \cdots, n\}$, on définit le point M_k d'affixe $z_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$. On rappelle que les points M_k forment un polygone régulier, inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1. On souhaite calculer le périmètre de ce cercle.

1. Montrer que, pour tout $k \in \{0, \cdots, n-1\}$, $M_k M_{k+1} = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.
2. Déterminer le périmètre du polygone $M_0 M_1 \cdots M_n$.
3. Déterminer la limite de ce périmètre lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 22. — Soit ABC un triangle, dont le centre du cercle circonscrit est l'origine O. On note G le centre de gravité, et a, b, c et g les affixes respectives des points A, B, C et G. On note enfin H le point d'affixe $h = a + b + c$.

1. Déterminer l'affixe de G.
2. Montrer que $|a| = |b| = |c|$.
3. Montrer que le nombre complexe $\dfrac{h-a}{c-b}$ est imaginaire pur. Interpréter.
4. Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
5. Montrer enfin que O, G et H sont alignés.

Ceci est général : pour tout triangle non plat, le centre du cercle circonscrit, le centre de gravité et l'orthocentre sont alignés sur une droite appelée *Droite d'Euler*.