CHAPITRE 5

EQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

Résumé

Ce chapitre est l'occasion de revenir sur un concept vu en Physique et en S.I : les équations différentielles linéaires. On verra différentes méthodes de résolution, et le lien avec les autres matières scientifiques.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les équations différentielles du premier ordre :

- Savoir trouver des primitives simples .... □
- Savoir résoudre des équations du premier ordre sans second membre .... □
- Savoir trouver la forme générale des équations du premier ordre avec second membre .... □
- Savoir déterminer une solution particulière par la variation de la constante .... □
- Savoir déterminer une solution particulière simple .... □
- Savoir déterminer une solution particulière par le principe de superposition .... □

② Concernant les équations différentielles du second ordre :

- Savoir résoudre les équations sans second membre dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ .... □
- Savoir trouver la forme générale des équations du premier ordre avec second membre .... □
- Savoir trouver une solution particulière avec second membre exponentielle-polynôme .... □

③ Savoir résoudre un problème de Cauchy .... □

Dans l'ensemble de ce cours, les fonctions sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On notera de manière générique $\mathbb{K}$ le corps d'arrivée des fonctions.

I. Notions d'équation différentielle

1) Généralités

Définition 1. — On appelle **équation différentielle** d'ordre n une égalité liant la variable réelle x, une fonction inconnue y, définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et ses dérivées successives $y', y'', \ldots, y^{(n)}$.

Remarque 1. — Si la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on dit que l'équation est scalaire. C'est l'objectif de ce chapitre. On verra plus tard dans l'année les équations différentielles vectorielles, où la fonction inconnue est à valeurs dans $\mathbb{R}^p$ ou $\mathbb{C}^p$.

Exemple 1. — Les équations suivantes sont des équations différentielles scalaires du premier ordre

$$y' + xy = 3x, \qquad y' = \frac{1}{x}, \qquad y' = y^2 + y, \qquad y' = ay \ (a \in \mathbb{R})$$

$y'' + 3y' + 4y = \mathrm{e}^x$ est une équation différentielle scalaire du second ordre.

Définition 2. — On appelle **solution maximale** d'une équation différentielle une fonction f satisfaisant l'équation différentielle, et définie sur un intervalle I maximal, c'est-à-dire une fonction ne pouvant être prolongée sur un intervalle plus grand.

Remarque 2. — Résoudre une équation différentielle, c'est trouver **l'ensemble** de ses solutions maximales.
On appellera alors **courbe intégrale** la courbe représentative d'une fonction maximale.

Remarque 3. — Nous allons cette année apprendre à résoudre certaines équations différentielles. Il arrive cependant très souvent qu'on arrive pas à exprimer les solutions d'une équation différentielle avec les fonctions usuelles. On essaie alors de représenter graphiquement une solution.

2) Problème de Cauchy

Définition 3. — Soit (E) une équation différentielle d'ordre n. On appelle **problème de Cauchy** la donnée de l'équation différentielle, et de n conditions initiales sur les valeurs de la fonction y et de ses dérivées en un réel x_0.

Exemple 2. — Par exemple, $y' = 3xy + 4$, avec $y(0) = 1$, est un problème de Cauchy.

3) Equations différentielles linéaires

Définition 4. — Une équation différentielle d'ordre n est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme

$$(\mathrm{E})\ :\ a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f$$

où $a_0, \cdots, a_n$ et f sont des fonctions continues sur un intervalle I.
f est appelé le **second membre** de l'équation différentielle linéaire.
Si f est la fonction nulle, on dit que l'équation linéaire est **homogène** ou **sans second membre**.
Si $a_0, \cdots, a_n$ sont des constantes, on dit que l'équation est à **coefficients constants**.

Exemple 3. — Les équations différentielles suivantes sont linéaires :

$$y' + 2xy = \mathrm{e}^x \qquad y'' + 2xy' + \ln(x) y = 1 \qquad y^{(3)} + y' = \frac{1}{x}$$

En revanche, $y' = y^2$ n'est pas linéaire.

II. Equations différentielles linéaires du premier ordre

1) Généralités

Définition 5. — Une équation différentielle du premier ordre est une équation différentielle de la forme

$$y' = a(x) y + b(x)$$

où a et b sont deux fonctions définies et continues sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple 4. — L'équation $y' = xy + \mathrm{e}^x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre.
L'équation $y' = 3y+4x$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre, à coefficients constants.

Définition 6. — Soit (E) $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y$. Il s'agit également d'une équation différentielle linéaire du premier ordre.

Exemple 5. — Les équations homogènes associées aux deux exemples précédents sont $y' = xy$ et $y' = 3y$.

Théorème 5.1.

Soit (E) une équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$, avec $y(x_0) = y_0$. Alors il existe une unique solution à ce problème de Cauchy.

Remarque 4. — Ainsi, il s'agira de trouver la seule solution si on dispose d'un problème de Cauchy.

2) Résolution d'une équation homogène

Théorème 5.2.

Soit a une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y$. L'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle I est

$$\mathscr{S} = \{x \mapsto k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}, \quad k \in \mathbb{R}\}$$

où A est une primitive de a sur I.

Démonstration. a étant continue sur I, elle y admet des primitives. On note A une primitive de a. Remarquons alors que f est solution de (E) si et seulement si, pour tout $x \in \mathrm{I}$:

$$\begin{aligned} f'(x) = a(x)f(x) &\Leftrightarrow f'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} = a(x)f(x)e^{-\mathrm{A}(x)} \quad \text{car } \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} > 0 \\ &\Leftrightarrow f'(x)e^{-\mathrm{A}(x)} + f(x)\left(-a(x)e^{-\mathrm{A}(x)}\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow (fe^{-\mathrm{A}})'(x) = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}$ est une fonction constante sur I. Il existe donc $k \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{I}, \quad f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)} = k \Leftrightarrow f(x) = k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$$

Réciproquement, une fonction de la forme $x \mapsto k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ est solution de (E). □

Exemple 6. — Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = xy$.

Solution. Soit a la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $a(x) = x$. Une primitive de a est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\mathrm{A} : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $y' = xy$ sur $\mathbb{R}$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Exercice 1. — Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle $y' = \frac{y}{x}$, avec $y(1) = 1$.

Solution. On note a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $a(x) = \frac{1}{x}$. Une primitive de a sur $\mathbb{R}_+^*$ est $\mathrm{A} : x \mapsto \ln(x)$. Alors, l'ensemble des solutions de l'équation $y' = \frac{y}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\ln(x)} = kx, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Avec la condition $y(1) = 1$, on obtient $k \times 1 = 1$, c'est-à-dire $k = 1$. Ainsi, l'unique solution du problème de Cauchy est

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}\right.$$

3) Cas général

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du premier ordre, on se ramène à une équation homogène, selon deux méthodes possibles.

Proposition 5.3.

Soit (E) $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire, avec a et b deux fonctions continues sur I.
Soit (E_0) l'équation différentielle homogène associée : (E_0) $y' = a(x)y$. Ses solutions sont les fonctions $x \mapsto ke^{A(x)}$, où A est une primitive de a et $k \in \mathbb{R}$.
Soit g une solution particulière de (E) : pour tout $x \in I$, $g'(x) = a(x)g(x) + b(x)$.
Alors l'ensemble des solutions de (E) sur I est

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto g(x) + ke^{A(x)}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Démonstration. Soit g une solution particulière de (E).

- Soit f une solution de (E). Notons $h = f - g$. Alors, pour tout réel $x \in I$

$$\begin{aligned} h'(x) &= f'(x) - g'(x) \\ &= (a(x)f(x) + b(x)) - (a(x)g(x) + b(x)) \\ &= a(x)(f(x) - g(x)) \\ &= a(x)h(x) \end{aligned}$$

  Ainsi h est une solution de l'équation homogène associée (E_0).
- Réciproquement, soit h une solution de l'équation (E_0). On note $f = h + g$. Alors, pour tout réel $x \in I$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= h'(x) + g'(x) \\ &= a(x)h(x) + (a(x)g(x) + b(x)) \\ &= a(x)(h(x) + g(x)) + b(x) \\ &= a(x)f(x) + b(x) \end{aligned}$$

  et donc f est solution de (E).

Ainsi, f est solution de (E) si et seulement si $f - g$ est solution de (E_0), ce qui donne le théorème. □

Remarque 5. — Ainsi, connaissant une solution particulière de l'équation générale, il suffit de résoudre l'équation homogène associée, et d'ajouter à ses solutions la solution particulière.

Méthode 5.1.

Pour résoudre une équation différentielle du premier ordre (E) : $y' = a(x)y + b(x)$ sur un intervalle I.

① on résout l'équation différentielle homogène associée : (E_0) : $y' = a(x)y$.

② on cherche une solution particulière de (E).

③ on conclut quant à l'ensemble des solutions de (E).

Exemple 7 (Fondamental)**.** — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, avec $a \neq 0$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Solution. On (E) l'équation $y' = ay + b$ et (E_0) l'équation homogène associée $y' = ay$.

- Une primitive de la fonction $x \mapsto a$ est $x \mapsto ax$. L'ensemble des solutions de l'équation homogène

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto ke^{ax}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

- Cherchons une solution particulière constante : soit $f : x \mapsto p$. Alors

$$\begin{aligned} f' = af + b \quad &\Leftrightarrow \quad 0 = a \times p + b \\ &\Leftrightarrow \quad p = -\frac{b}{a} \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction $f : x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de (E).

Bilan : l'ensemble des solutions de (E) est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto k\mathrm{e}^{ax} - \frac{b}{a}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Exercice 2. — Déterminer l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2y + x$, avec $y(0) = 1$.

Solution. Comme précédemment, l'ensemble des solutions de l'équation $y' = 2x$ est

$$\mathscr{S}_0 = \{ x \mapsto k\mathrm{e}^{2x}, \quad k \in \mathbb{R} \}$$

Le second membre étant $x \mapsto x$, cherchons une solution particulière de la forme $x \mapsto ax + b$. f est donc solution si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) = 2f(x) + x \quad &\Leftrightarrow \quad a = 2(ax + b) + x \\ &\Leftrightarrow \quad (2a+1)x + 2b - a = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, on a $2a + 1 = 0$ et $2b - a = 0$, c'est-à-dire $a = -\frac{1}{2}$ et $b = -\frac{1}{4}$. Une solution particulière est donc $x \mapsto -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}$.

Bilan : l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = 2y + x$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{ x \mapsto k\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, \quad k \in \mathbb{R} \right\}$$

Avec l'hypothèse $y(0) = 1$, cela donne $k - \frac{1}{4} = 0$, et donc $k = \frac{1}{4}$.

Bilan : la solution de l'équation $y' = 2y + x$, avec $y(0) = 1$ est

$$\boxed{x \mapsto \frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$$

Méthode 5.2 (Principe de superposition).

Pour déterminer une solution particulière : Si on souhaite résoudre l'équation $y' + ay = f + g$, on peut chercher une solution particulière y_1 de $y' + ay = f$ et une autre y_2 de $y' + ay = g$. Alors, $y_1 + y_2$ est solution de $y' + ay = f + g$.

4) Méthode de variation de la constante

Méthode 5.3 (Variation de la constante).

Soit (E) l'équation différentielle $y' = a(x)y + b(x)$. Les solutions de l'équation $y' = a(x)y$ sont $x \mapsto k\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ où A est une primitive de a.

Pour déterminer une solution particulière de (E), on cherche une solution sous la forme $x \mapsto k(x)\mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$, où k est cette fois-ci une fonction dérivable sur l'intervalle, et non une constante.

Exemple 8. — Soit (E) l'équation différentielle $y' = 2xy + x$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène sont $x \mapsto k\mathrm{e}^{x^2}$. Cherchons une solution particulière sous la forme $f : x \mapsto k(x)\mathrm{e}^{x^2}$, où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. f vérifie donc, pour tout réel x,

$$\begin{aligned} f'(x) = 2xf(x) + x \quad &\Leftrightarrow \quad k'(x)\mathrm{e}^{x^2} + k(x)(2x\mathrm{e}^{x^2}) = 2xk(x)\mathrm{e}^{x^2} + x \\ &\Leftrightarrow \quad k'(x) = x\mathrm{e}^{-x^2} \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $k : x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$, on obtient ainsi une solution particulière de (E) :

$$x \mapsto -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{e}^{x^2} = -\frac{1}{2}$$

et les solutions de (E) sont alors

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{x^2} - \frac{1}{2}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque 6. — Dans le cas précédent, on aurait pu chercher une solution particulière sous la forme $x \mapsto ax + b$, ce qui était plus efficace.

Exercice 3. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation

$$(\mathrm{e}^x + 1)y' = \mathrm{e}^x y + 2x(\mathrm{e}^x + 1)^2$$

Solution. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x + 1 > 0$, l'équation est donc équivalente à l'équation

$$\text{(E)} \quad y' = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} y + 2x(\mathrm{e}^x + 1)$$

- La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ $x \mapsto \ln(\mathrm{e}^x + 1)$. Ainsi, l'équation homogène $y' = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} y$ admet comme solutions

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{\ln(\mathrm{e}^x+1)} = k(\mathrm{e}^x + 1), \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

- Cherchons une solution particulière par variation de la constante. On cherche une solution f de la forme $f : x \mapsto k(x)(\mathrm{e}^x + 1)$, où k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors $f' : x \mapsto k'(x)(\mathrm{e}^x + 1) + k(x)\mathrm{e}^x$ et l'équation différentielle (E) s'écrit

$$\begin{aligned} f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} f(x) + 2x(\mathrm{e}^x + 1) \quad &\Leftrightarrow \quad k'(x)(\mathrm{e}^x + 1) + k(x)\mathrm{e}^x = k(x)(\mathrm{e}^x + 1)\frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} + 2x(\mathrm{e}^x + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad k'(x)(\mathrm{e}^x + 1) = 2x(\mathrm{e}^x + 1) \\ &\Leftrightarrow \quad k'(x) = 2x \end{aligned}$$

En prenant comme primitive $k : x \mapsto x^2$, on obtient donc une solution particulière de (E) : $f : x \mapsto k(x)(\mathrm{e}^x + 1) = x^2(\mathrm{e}^x + 1)$.

Bilan : l'ensemble des solutions de (E) est donc

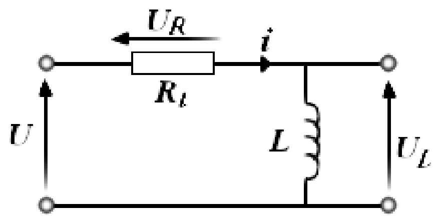
$$\mathscr{S} = \{x \mapsto x^2(e^x+1) + k(e^x+1), \quad k \in \mathbb{R}\}$$

5) En physique et S.I.

En électronique, il y a deux cas classiques d'équation différentielle du premier ordre : le circuit RL et le circuit RC.

Proposition 5.4.

Soit le circuit RL suivant :



En régime transitoire, la tension U_L vérifie $U_L = L\frac{di}{dt}$ et la tension U_R vérifie $U_R = R_t i$. D'après la loi des mailles, $U = U_R + U_L$, et donc i vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$U = L\frac{di}{dt} + R_t i = Li' + R_t i$$

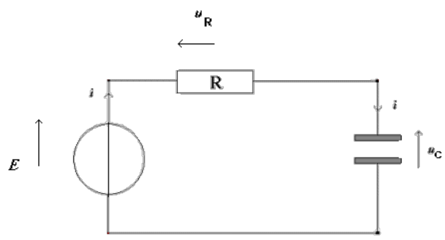
Ainsi, si $U = U_0$ est constante, et en supposant comme condition initiale $i(0) = 0$, on obtient

$$\forall\, t \geqslant 0, \quad i(t) = \frac{U_0}{R_t}\left(1 - e^{-\frac{R_t t}{L}}\right)$$

On pose alors $\tau = \frac{L}{R_t}$ la constante de temps du circuit.

Proposition 5.5.

Soit le circuit RC suivant :



En régime transitoire, la tension U_R vérifie $U_R = Ri$, et la tension U_C vérifie $i = C\frac{dU_C}{dt}$. D'après la loi des mailles, $E = U_R + U_C$, et donc U_C vérifie l'équation différentielle

$$E = RC\frac{dU_C}{dt} + U_C$$

Ainsi, si E est constante, et en supposant comme condition initiale $U_C(0) = 0$ (condensateur déchargé),

on obtient
$$\forall\ t \geqslant 0, \quad U_C(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$
On pose alors $\tau = RC$ la constante de temps du circuit.

III. Equations différentielles du second ordre à coefficients constants

1) Généralités

Définition 7. — Une équation différentielle du second ordre à coefficients constants est une équation différentielle de la forme
$$ay'' + by' + cy = d(x)$$
où a, b et c sont des réels ou des complexes, et d une fonction définie et continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple 9. — L'équation $y'' + 3y' - y = e^x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficient constant.
L'équation $y'' + xy' + y = 4x$ est une équation différentielle linéaire du second ordre, mais pas à coefficients constants.

Définition 8. — Soit (E) $ay'' + by' + cy = d(x)$ une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. On appelle **équation homogène** associée à (E) l'équation différentielle $ay'' + by' + cy = 0$. Il s'agit également d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.

Exemple 10. — L'équation homogène associée à l'équation $y'' + 3y' - y = e^x$ est $y'' + 3y' - y = 0$.

Théorème 5.6.

Soit (E) une équation différentielle $ay'' + by' + cy = d(x)$ $(a \neq 0)$, avec $y(x_0) = y_0$ et $y'(x_0) = y'_0$. Alors il existe une unique solution à ce problème de Cauchy.

Remarque 7. — Ainsi, il s'agira de trouver la seule solution si on dispose d'un problème de Cauchy.

2) Résolution de l'équation homogène

Définition 9. — Soit (E) : $ay''+by'+cy = 0$ une équation du second ordre à coefficients constants sans second membre. On appelle **équation caractéristique** de l'équation (E) l'équation du second degré à coefficients complexes $az^2 + bz + c = 0$.

Dans le cas général complexe, les solutions sont faciles à obtenir :

Théorème 5.7.

Soit (E) : $ay''+by'+cy = 0$ une équation du second ordre à coefficients constants sans second membre, et $az^2 + bz + c = 0$ son équation caractéristique. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta \neq 0$, on note z_1 et z_2 les deux racines complexes de l'équation caractéristique. Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \mathrm{A}e^{z_1 x} + \mathrm{B}e^{z_2 x}$$

où A et B sont des complexes.

- Si $\Delta = 0$, on note z_0 la racine double de l'équation caractéristique. Alors les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^{z_0 x}$$

où A et B sont des complexes.

Dans le cas où a, b et c sont réels, on souhaite obtenir les solutions à valeurs réelles. On obtient alors le théorème suivant :

Théorème 5.8.

Soit (E) l'équation $ay'' + by' + cy = 0$, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de l'équation caractéristique.

- Si $\Delta > 0$, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto \mathrm{A}e^{\alpha x} + \mathrm{B}e^{\beta x}$, où α et β sont les racines de l'équation caractéristique et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta = 0$, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})e^{\alpha x}$, où α est la racine double de l'équation caractéristique et $(\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2$.
- Si $\Delta < 0$, on note $z_1 = k + i\omega$ et $z_2 = k - i\omega$ les racines complexes de l'équation caractéristique. Alors, les solutions de (E) sont de la forme $x \mapsto (\mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x))e^{kx}$.

Exemple 11. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' - 2y' - 3y = 0$.

Solution. L'équation caractéristique de l'équation est $x^2 - 2x - 3 = 0$. Son discriminant vaut $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-3) = 16 > 0$. Ains, l'équation caractéristique possède deux racines réelles :

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2} = 3$$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' - 2y' - 3y = 0$ s'écrit

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \mathrm{A}e^{-x} + \mathrm{B}e^{3x}, \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 4 (Fondamental). — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$.

Solution. Son équation caractéristique est $x^2 + \omega^2 x = 0$, de discriminant $\Delta = -4\omega^2 < 0$. Elle possède donc deux racines complexes conjuguées

$$z_1 = \frac{-2i\omega}{2} = -\omega i \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{2i\omega}{2} = i\omega$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + \omega^2 y = 0$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto (\mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x))e^0 = \mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x), \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 5. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + y = 0$.

Solution. Son équation caractéristique est $x^2 + 2x + 1 = 0$, de racine double $x = -1$. Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 2y' + y = 0$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto (\mathrm{A}x + \mathrm{B})\mathrm{e}^{-x}, \qquad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

3) Cas général

Pour résoudre une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants, on se ramène à une équation homogène.

Proposition 5.9.

Soit (E) $ay'' + by' + cy = d(x)$ une équation différentielle linéaire, avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ et d une fonction continue sur I.
Soit (E_0) l'équation différentielle homogène associée : (E_0) $ay'' + by' + cy = 0$.
Soit g_0 une solution particulière de (E) : pour tout $x \in \mathrm{I}$, $ag''(x) + bg'(x) + cg(x) = d(x)$.
Alors l'ensemble des solutions de (E) sur I s'écrit $g + g_0$, avec g une solution de l'équation homogène associée :

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto g_0(x) + g(x), \quad g \text{ solution de } (\mathrm{E}_0)\right\}$$

Méthode 5.4.

Pour déterminer une solution particulière dans le cas où le second membre est de la forme $\mathrm{P}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$, avec P un polynôme de degré n, on cherche une solution de la forme

- $x \mapsto \mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ si γ n'est pas solution de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto x\mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ si γ est racine simple de l'équation caractéristique ;
- $x \mapsto x^2\mathrm{Q}(x)\mathrm{e}^{\gamma x}$ si γ est racine double de l'équation caractéristique ;

où Q est un polynôme de degré n.
On peut utiliser cette méthode si le second membre est un polynôme ($\gamma = 0$) ou une exponentielle (P de degré 0).

Remarque 8. — De manière générale, on cherche une solution particulière de la même forme que le second membre, éventuellement en augmentant le degré d'un polynôme.

Exemple 12. — Déterminer les solutions de l'équation $y'' + y = x + 1$.

Solution. L'équation homogène s'écrit $y'' + y = 0$, qui a comme solution

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto \mathrm{A}\cos(x) + \mathrm{B}\sin(x), \quad (\mathrm{A}, \mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

(cas vu précédemment, où $\omega = 1$). Puisque $x + 1 = (x + 1)\mathrm{e}^{0x}$, et que 0 n'est pas racine de l'équation caractéristique, cherchons une solution particulière de la même forme, c'est-à-dire cherchons c et d deux réels tels que $f : x \mapsto cx + d$ soit solution de l'équation. En injectant dans l'équation (et puisque $f'' = 0$), on obtient

$$cx + d = x + 1 \Leftrightarrow c = 1 \quad \text{et} \quad d = 1$$

Ainsi, la fonction $x \mapsto x+1$ est solution particulière.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation $y' + y = x+1$ est donc

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto x+1+\mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x), \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Exercice 6. — Déterminer les solutions de l'équation $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$.

Solution. Notons (E) : $y'' - 4y' + 4y = \mathrm{e}^{2x}$ et (E_0) son équation homogène $y'' - 4y' + 4y = 0$.

- L'équation caractéristique de l'équation homogène est $r^2 - 4r + 4 = (r-2)^2$ qui admet donc 2 comme racine double. Ainsi, l'ensemble des solutions de (E_0) est

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto (\mathrm{A}x+\mathrm{B})\mathrm{e}^{2x}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

- Puisque 2 est racine double de (E_0), on ne peut pas chercher une solution particulière de la forme $x \mapsto c\mathrm{e}^{2x}$, ni même $x \mapsto (cx+d)\mathrm{e}^{2x}$ puisque celles-ci sont solutions de l'équation homogène. On cherche alors une solution de la forme $f : x \mapsto (ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x}$. On obtient

$$f' : x \mapsto (2ax^2 + (2b+2a)x + 2c + b)\mathrm{e}^{2x} \quad \text{et} \quad f'' : x \mapsto (4ax^2 + (8a+4b)x + 2a + 4c + 4b)\mathrm{e}^{2x}$$

En injectant dans l'équation (E), on a alors

$$(4ax^2 + (8a+4b)x + 2a + 4c + 4b)\mathrm{e}^{2x} - 4(2ax^2 + (2b+2a)x + 2c + b)\mathrm{e}^{2x} + 4(ax^2+bx+c)\mathrm{e}^{2x} = \mathrm{e}^{2x}$$

Soit, après simplification $2a = 1$ et donc $a = \frac{1}{2}$. b et c sont quelconques, et c'est normal puisque $x \mapsto (cx+d)\mathrm{e}^{2x}$ est une solution de l'équation homogène. Ainsi, la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x}$ est solution particulière de (E).

Bilan : l'équation (E) admet comme solutions sur $\mathbb{R}$:

$$\mathscr{S} = \left\{x \mapsto \frac{1}{2}x^2\mathrm{e}^{2x} + (\mathrm{A}x+\mathrm{B})\mathrm{e}^{2x}, \quad (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

Remarque 9. — Le principe de superposition s'applique aussi dans le cas d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constant : si on cherche une solution particulière de l'équation $ay''+by'+cy = d_1+d_2$, il suffit de trouver une solution particulière y_1 de $ay''+by'+cy = d_1$ et une solution particulière y_2 de $ay''+by'+cy = d_2$; une solution de l'équation de départ est alors $y_1 + y_2$.

Méthode 5.5.

Si le second membre est lié aux fonctions trigonométriques, on écrit $\cos(x) = \Re(\mathrm{e}^{ix})$ et $\sin(x) = \Im(\mathrm{e}^{ix})$, et on se ramène à une équation dont le second membre est une exponentielle.

Exemple 13. — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$.

Solution. L'équation homogène associée est $y' + y = 0$, de solution

$$\mathscr{S}_0 = \left\{x \mapsto k\mathrm{e}^{-x}, \quad k \in \mathbb{R}\right\}$$

Cherchons une solution particulière de l'équation $y'+y = \mathrm{e}^{ix}$, de la forme $f : x \mapsto a\mathrm{e}^{ix}$ (puisque $x \mapsto \mathrm{e}^{ix}$

n'est pas solution de l'équation homogène). En remplaçant dans l'équation, on obtient

$$\begin{aligned} f'+f=\mathrm{e}^{ix} &\Leftrightarrow aie^{ix}+ae^{ix}=\mathrm{e}^{ix} \\ &\Leftrightarrow a(1+i)=1 \\ &\Leftrightarrow a=\frac{1}{1+i}=\frac{1}{2}-i\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ainsi, une solution particulière de $y'+y=\mathrm{e}^{ix}$ est

$$\begin{aligned} x\mapsto\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)\mathrm{e}^{ix} &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)(\cos(x)+i\sin(x)) \\ &= \frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+i\left(\frac{1}{2}\sin(x)-\frac{1}{2}\cos(x)\right) \end{aligned}$$

La partie réelle de la solution précédente (puisque $\cos(x)=\Re(\mathrm{e}^{ix})$) donne alors une solution particulière de $y'+y=\cos(x)$.
Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation $y'+y=\cos(x)$ est donc

$$\mathscr{S}=\left\{x\mapsto\frac{1}{2}\cos(x)+\frac{1}{2}\sin(x)+k\mathrm{e}^{-x},\quad k\in\mathbb{R}\right\}$$

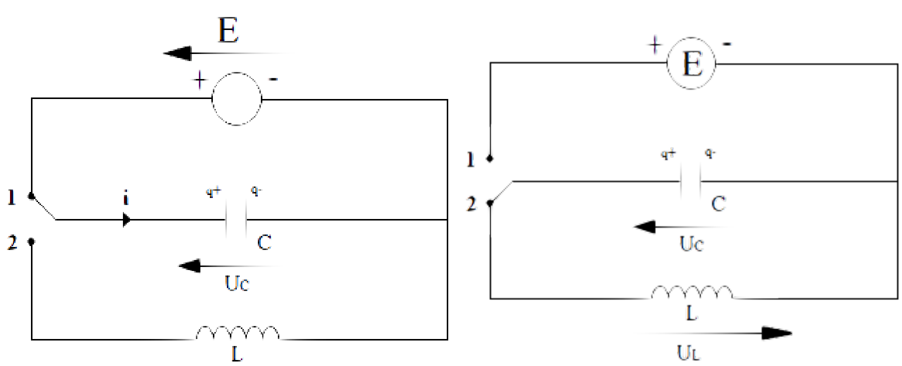
Remarque 10. — Le second membre étant trigonométrique, on aurait pu chercher une solution particulière de la forme $x\mapsto \mathrm{A}\cos(x)+\mathrm{B}\sin(x)$, en identifiant les parties "cosinus" et les parties "sinus".

4) En physique et S.I.

Les cas des circuits LC et RLC mènent à la résolution d'équations différentielles linéaires du second ordre.

Proposition 5.10.

Soit le circuit LC suivant :



Après avoir chargé le condensateur (première image), on bascule l'interrupteur pour déclencher la décharge de celui-ci à travers la bobine.
En régime transitoire, la tension $\mathrm{U_L}$ vérifie $\mathrm{U_L}=\mathrm{L}\frac{di}{dt}$ et la tension $\mathrm{U_C}$ vérifie $\mathrm{U_C}=\frac{q}{c}$ avec $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$. D'après la loi des mailles, $0=\mathrm{U_C}+\mathrm{U_L}$, et donc, en dérivant cette équation par rapport au temps, i vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$\mathrm{L}\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}+\frac{1}{\mathrm{C}}i=0$$

qui s'écrit encore

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{LC} i = 0$$

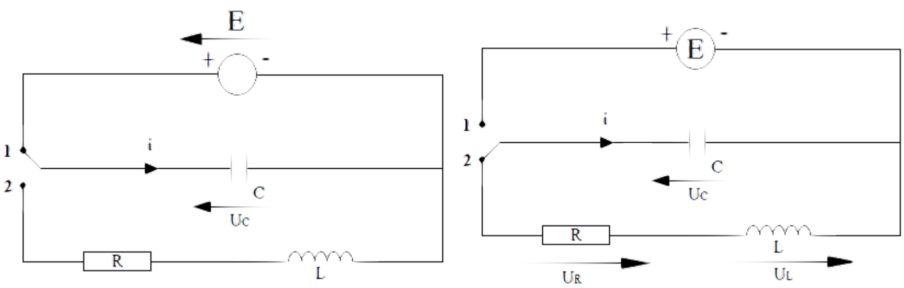
En notant $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, l'équation s'écrit $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + \omega^2 i = 0$, qui a comme solutions

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t) = C\cos(\omega t + \varphi)$$

On détermine alors les constantes grâce aux conditions initiales.
$T = \frac{2\pi}{\omega}$ représente la période.

Proposition 5.11.

Soit le circuit RLC suivant :



Après avoir chargé le condensateur (première image), on bascule l'interrupteur pour déclencher la décharge de celui-ci à travers la bobine et la résistance.
En régime transitoire, la tension U_L vérifie $U_L = L\frac{di}{dt}$, la tension U_C vérifie $U_C = \frac{q}{c}$ avec $i = \frac{dq}{dt}$ et $U_R = Ri$.
D'après la loi des mailles, $0 = U_R + U_C + U_L$, et donc, en dérivant cette équation par rapport au temps, i vérifie l'équation différentielle sur $\mathbb{R}^+$

$$L\frac{d^2 i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0$$

qui s'écrit encore

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0$$

En notant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre du circuit et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$, où $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ est le facteur de qualité, l'équation s'écrit $\dfrac{d^2 i}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$.
On dispose de trois cas, selon le signe du discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$:

- Si $\Delta > 0$, c'est-à-dire si $Q < \frac{1}{2}$, on obtient des solutions de la forme

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = Ae^{k_1 t} + Be^{k_2 t}$$

  avec k_1, k_2 solutions de l'équation caractéristique. Le régime est dit **apériodique**. k_1 et k_2 sont strictement négatives, et sont généralement notés $-\frac{1}{\tau_+}$ et $-\frac{1}{\tau_-}$.

- Si $\Delta = 0$, c'est-à-dire si $Q = \frac{1}{2}$, on obtient des solutions de la forme

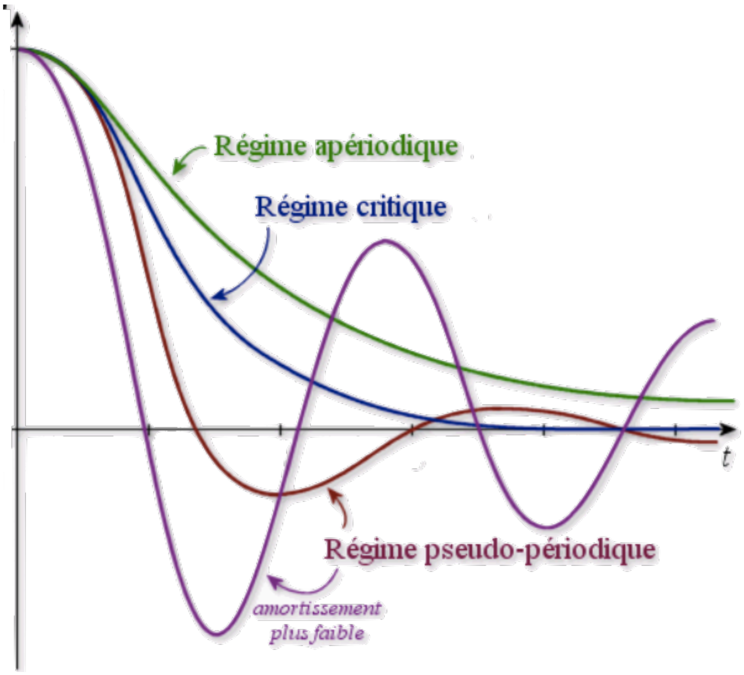
$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = (At + b)e^{k_0 t}$$

où $k_0 = -\omega_0 = -\frac{1}{\tau}$ est la racine double de l'équation caractéristique. Ce régime est appelé **régime critique**.

- Enfin si $\Delta < 0$, c'est-à-dire si $Q > \frac{1}{2}$, on obtient des solutions de la forme

$$\forall\ t \geqslant 0, \quad i(t) = (A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t))e^{-\frac{t}{\tau}}$$

avec $\omega = \omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$, appelée pseudo-pulsation. Le régime est dit **pseudo-périodique**.



Exercices

Équations différentielles

Exercice 7. — Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = 2e^x$.
2. $x' + x = \sin(2t)$.
3. $y' - y = te^{-t}$.
4. $y' - y = 2t\,\mathrm{ch}(t)$.

Exercice 8. — Résoudre l'équation différentielle :

$$xy' - 2y = x^2 \ln(x)$$

Exercice 9. — Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $(1 + x^2)y' - 2xy = (1 + x^2)^2$.
2. $xy' + y = e^x$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 10. — Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = t^2 + e^{2t}$.
2. $y'' - 2y' + 5y = x^2 + 1$.
3. $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{sh}(2x)$ avec $y(0) = 1$ et $y'(0) = -1$.

Problèmes et sujets

Exercice 11 (ATS 2010)**.** — Résoudre l'équation différentielle :

$$x^2 y' - xy = -x^4 - 1$$

Exercice 12 (ATS 2013)**.** — Résoudre l'équation différentielle

$$y'' + 4y = \sin(x) + \sin(3x)$$

Exercice 13. — Résoudre l'ensemble des équations différentielles des circuits RL, RC, LC et RLC.

Exercice 14 (Loi de refroidissement de Newton)**.** — *La vitesse de refroidissement d'un corps inerte est proportionnelle à la différence de température entre ce corps et le milieu ambiant à tout instant.*

A l'instant $t = 0$, une personne entre dans une salle de classe chauffée à 20°C, avec son gobelet de café chaud qui est à 80°C. On note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t.
On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$.

1. Expliquer pourquoi il existe une constante positive k telle que $\theta'(t) = k(20 - \theta(t))$ pour tout réel t positif.
2. Exprimer $\theta(t)$ en fonction de t et k.
3. Après deux minutes, le café est à une température de 60řC. Donner une valeur approchée de k à $0,1$.

4. A quel moment la personne pourra-t-elle boire son café, sachant qu'elle l'aime à 40řC ?

Exercice 15. — Soient a et b deux réels, I un intervalle de $\mathbb{R}_+^*$ et h une fonction continue sur I à valeurs réelles. On considère l'équation

$$(\mathrm{E}) : \quad x^2 y'' + axy' + by = h$$

1. Par le changement de variable $t = \ln(x)$, montrer que résoudre (E) revient à résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
2. Application : résoudre, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation

$$x^2 y'' + 3xy' + 2y = 1 + x^2$$