CHAPITRE 6

SYSTÈMES LINÉAIRES

Résumé

L'objectif de ce chapitre est d'introduire rigoureusement la notion de système linéaire, déjà vue lors des années antérieures. On y voit, entre autre, la méthode de résolution du pivot de Gauss-Jordan.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir résoudre un système simple par substitution .... □

② Savoir appliquer la méthode du pivot de Gauss-Jordan pour transformer un système en un système triangulaire .... □

③ Résoudre un système ayant une infinité de solutions avec un (ou plusieurs) paramètres .... □

④ Savoir déterminer le rang d'un système .... □

⑤ Savoir résoudre un système ayant un paramètre .... □

I. Définitions et propriétés

1) Définitions

Définition 1. — Soient n et p deux nombres entiers non nuls. On appelle **système d'équations linéaires** de n équations à p inconnus (ou système n fois p, $n \times p$) un système de la forme

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array}\right.$$

où les $(a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et les $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont des nombres réels, et $x_1, x_2, \cdots, x_n$ sont des inconnues.

Le nombres a_{ij} est le **coefficient** de la $j^{\text{ème}}$ inconnue x_j dans la $i^{\text{ème}}$ équations (L_i).

Remarque 1. — Si $n = p$ on dit que le système (S) est **carré d'ordre** n.

Exemple 1. — Le système

$$(\mathrm{S}_1)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 & (\mathrm{L}_1) \\ 3x_1 & + & x_2 & = & -2 & (\mathrm{L}_2) \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues. C'est ainsi un système carré d'ordre 2.

Le système

$$(\mathrm{S}_2)\left\{\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 4 & (\mathrm{L}_1) \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 3 & (\mathrm{L}_2) \end{array}\right.$$

est un système linéaire de 2 équations à 3 inconnues.

2) Propriétés

Définition 2. — Soit

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1) \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2) \\ & & & & \vdots & & & & & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n) \end{array}\right.$$

- **Résoudre** le système (S), c'est trouver toutes les p-listes $(x_1, \cdots, x_p)$ de réels vérifiant les n équations $(\mathrm{L}_1, \cdots, \mathrm{L}_n)$.
- On dit qu'un système est **incompatible** s'il n'admet pas de solution.
- Deux systèmes (S) et (S′) sont dits **équivalents** s'ils ont les mêmes solutions.
- Le système (S) est dit **homogène** (ou **sans second membre**) si $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Dans ce cas, la p-liste $(0, \cdots, 0)$ est toujours solution de (S).

- On appelle **système homogène associé** à (S) le système obtenu à partir de (S) en remplaçant tous les nombres b_i par 0.

Remarque 2. — Dans le cas où $p < n$, il y a plus d'équations que d'inconnues. Soit certaines équations sont redondantes (et on peut donc les supprimer), soit le système est incompatible.
Dans la suite, on ne s'intéressera qu'au cas $n \leqslant p$.

3) Résolution par substitution

Méthode 6.1.

La méthode par résolution consiste à écrire une des inconnues (par exemple x_1) en fonction des autres $(x_2, x_3, \cdots)$, puis à remplacer cette inconnue x_1 dans toutes les autres équations en fonction de $x_2, x_3, \cdots$. Cette méthode est efficace lorsqu'il y a peu d'inconnues ou d'équations.

Exemple 2. — Résoudre le système suivant :

$$(\mathrm{S}_1)\left\{\begin{array}{rcrcll} 2x_1 & - & 3x_2 & = & 1 & (\mathrm{L}_1)\\ -3x_1 & + & x_2 & = & 2 & (\mathrm{L}_2)\end{array}\right.$$

Solution. En utilisant (L_2), on peut exprimer x_2 en fonction de x_1 : $x_2 = 3x_1 + 2$. On remplace alors cette égalité dans (L_1) pour en déduire la valeur de x_1. On obtiendra enfin la valeur de x_2 :

$$(\mathrm{S}_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcccll} 2x_1 & - & 3(3x_1+2) & = & 1 & (\mathrm{L}_1)\\ & & x_2 & = & 3x_1+2 & (\mathrm{L}_2)\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{S}_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rccll} -7x_1 & & = & 7 & (\mathrm{L}_1)\\ & x_2 & = & 3x_1+2 & (\mathrm{L}_2)\end{array}\right.$$

$$(\mathrm{S}_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rccll} x_1 & & = & -1 & (\mathrm{L}_1)\\ & x_2 & = & -1 & (\mathrm{L}_2)\end{array}\right.$$

Ainsi, le système admet une unique solution : $\{(-1;-1)\}$.

4) Systèmes triangulaires

Les système triangulaires sont les plus simples des systèmes, puisqu'ils se résolvent très facilement.

Définition 3. — On dit qu'un système (S) $n \times p$ est **triangulaire** si

$$\forall\, i \in \{1;\cdots;n\}, \forall\, j \in \{1;\cdots;p\} \quad i > j \Rightarrow a_{i,j} = 0$$

Ainsi, si $n < p$, le système est de la forme

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{ccccccccccccll} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 & (\mathrm{L}_1)\\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 & (\mathrm{L}_2)\\ & & & & & & & \vdots & & & & & & \\ & & & & & & a_{nn}x_n & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n & (\mathrm{L}_n)\end{array}\right.$$

Si $n = p$, on a alors le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccccccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 & (L_1) \\ & & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + & \cdots & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_n & (L_2) \\ & & & & & & & & & & \vdots & & & \\ & & & & & & & & & & a_{nn}x_n & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

Les coefficients diagonaux $a_{11}, \cdots, a_{nn}$ sont appelés les **pivots** du système.

Remarque 3. — Lorsque $n = p$ et que tous les pivots a_{ii} (pour $i \in \{1;\cdots;n\}$) sont non nuls, le système se résout par substitutions successives, de (L_n) à (L_1). Il y a alors une **unique n-liste solution**.

Méthode 6.2.

Dans le cas $n < p$, il y a une (ou plusieurs) inconnue(s) en trop. On choisit alors ces inconnues comme inconnues auxiliaires, et on résout comme pour la cas $n = p$.

Exemple 3. — Résoudre le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} 2x & - & y & + & 3z & = & -1 \\ & & 2y & - & 4z & = & 2 \end{array}\right.$$

Solution. Il y a 3 inconnues, pour deux équations. Exprimons x et y en fonction de z :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccccccc} 2x & - & y & = & -1 & - & 3z \\ & & 2y & = & 2 & + & 4z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ccccc} x & = & & - & \frac{1}{2}z \\ y & = & 1 & + & 2z \end{array}\right.$$

L'ensemble des solutions est donc $\mathscr{S} = \left\{\left(-\dfrac{1}{2}z; 1+2z; z\right),\ z \in \mathbb{R}\right\}$.

Remarque 4. — Bien évidemment, si on choisit une autre inconnue auxiliaire, le résultat ne sera pas sous la même forme, mais désignera bien le même ensemble de solutions.

II. Pivot de Gauss-Jordan

1) Exemple

On souhaite résoudre le système suivant

$$(S)\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & L_1 \\ 2x & - & 2y & + & 2z & = & 2 & L_2 \\ -x & + & y & + & 3z & = & 1 & L_3 \end{array}\right.$$

Pour faire cela, on va utiliser différentes opérations dites élémentaires, qui transforment le système (S) en un système équivalent, mais triangulaire cette fois-ci. Il ne restera alors plus qu'à résoudre le système triangulaire associé.

Ici :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & L_1 \text{ ligne Pivot} \\ & - & 6y & - & 2z & = & 0 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & & 3y & + & 5z & = & 2 & L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array}\right.$$

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 2z & = & 1 & L_1 \\ & - & 6y & - & 2z & = & 0 & L_2 \text{ ligne pivot} \\ & & & & 8z & = & 4 & L_3 \leftarrow 2L_3 + L_2 \end{array}\right.$$

On obtient ainsi un système triangulaire, qu'on résout :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{1}{3} \\ y & = & -\frac{1}{6} \\ z & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ainsi, la solution de (S) est $\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) Opérations élémentaires

Définition 4. — Soit (S) un système $n \times p$. On appelle **opération élémentaire** l'une des trois opérations suivantes :

- $L_i \leftrightarrow L_j$: **échange** de la $i^{\text{ième}}$ ligne L_i et de la $j^{\text{ième}}$ ligne L_j.
- $L_i \leftarrow aL_i$ où $a \neq 0$: on **remplace** la $i^{\text{ième}}$ ligne par elle même **multipliée** par un nombre non nul a.
  Utilité : lorsqu'on a des fractions dans la ligne L_i, cela permet d'enlever les dénominateurs.
- $L_i \leftarrow L_i + bL_j$ où b est quelconque : on **remplace** la $i^{\text{ième}}$ ligne par la **somme** d'elle même et d'un multiple d'une autre ligne.
  Utilité : permet d'éliminer une inconnue.

Remarque 5. — En combinant la deuxième et la troisième opérations élémentaires, on obtient l'opération
$L_i \leftarrow aL_i + bL_j$ où a est non nul, et b est quelconque.

Théorème 6.1.

Tout système obtenu à partir d'un système (S) en transformant l'une de ses équations par une opération élémentaire est équivalent à (S), et a donc le même ensemble de solutions.

Remarque 6. — Ainsi, en combinant différentes opérations élémentaires, on ne change pas l'ensemble de solutions du système.

3) Pivot de Gauss-Jordan

Méthode 6.3.

En utilisant les opérations élémentaires comme dans l'exemple, on va résoudre un système (S) par la méthode du pivot de Gauss :

1. On élimine successivement des inconnues via les opérations élémentaires, pour transformer le système initial en un système triangulaire;

2. On résout le système triangulaire par substitutions.

Exemple 4. —

- (Une unique solution)

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 & (L_1)\\ 3x & + & y & + & 2z & = & 1 & (L_2)\\ 2x & + & 3y & + & z & = & 0 & (L_3)\end{array}\right.$$

- (Une infinité de solution)

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_1)\\ 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_2)\\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & (L_3)\\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 & (L_4)\end{array}\right.$$

- (Aucune solution)

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_1)\\ 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_2)\\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & (L_3)\\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 & (L_4)\end{array}\right.$$

Solution. On utilise la méthode du Pivot de Gauss, en n'oubliant pas d'indiquer les opérations effectuées.

- $$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 & \text{ligne pivot}\\ & - & 5y & - & 7z & = & -5 & L_2\leftarrow L_2-3L_1\\ & - & y & - & 5z & = & -4 & L_3\leftarrow L_3-2L_1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = & 2 & \\ & - & 5y & - & 7z & = & -5 & \text{ligne pivot}\\ & & & - & 18z & = & -15 & L_3\leftarrow 5L_3-L_2\end{array}\right.$$

  Le système est triangulaire avec tous ses pivots non nuls : on remonte celui-ci pour trouver une unique solution.

  $$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{1}{6}\\ y & = & -\frac{1}{6}\\ z & = & \frac{5}{6}\end{array}\right.$$

  Ainsi,

  $$\boxed{\mathscr{S}=\left\{\left(-\frac{1}{6};-\frac{1}{6};\frac{5}{6}\right)\right\}}$$

- On n'hésite pas à échanger des lignes pour avoir une ligne pivot pratique.

  $$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & (L_1)\\ 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & (L_2)\\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & (L_3)\\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 & (L_4)\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & L_1\leftrightarrow L2\\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 & \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 0 & \end{array}\right.$$

  Ainsi,

  $$(S)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & \text{ligne pivot}\\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & L_2\\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_3\leftarrow 2L_3-3L_1\\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_4\leftarrow 2L_4-5L_1\end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes sont les mêmes. On en élimine une, et on continue la méthode du Pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & \text{ligne pivot} \\ & & & - & 9z & - & 28t & = & 0 & L_3 \leftarrow L_3 - 8L_2 \end{array}\right.$$

On obtient un système triangulaire, qu'on résout en utilisant une variable auxiliaire (par exemple ici, t) :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{15}{9}t \\ y & = & -\frac{29}{9}t \\ z & = & -\frac{28}{9}t \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \left\{\left(\frac{5}{3}t; -\frac{29}{9}t; -\frac{28}{9}t; t\right),\ t \in \mathbb{R}\right\}}$$

- Le système est le même que précédemment, excepté la dernière ligne. Par les deux mêmes opérations, on obtient :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 2z & - & 2t & = & 0 \\ 5x & + & y & + & z & - & 2t & = & 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcrcll} 2x & + & 2y & - & z & & & = & 0 & \text{ligne pivot} \\ & - & y & + & 2z & + & 3t & = & 0 & L_2 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 0 & L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \\ & - & 8y & + & 7z & - & 4t & = & 2 & L_4 \leftarrow 2L_4 - 5L_1 \end{array}\right.$$

Les deux dernières lignes étant incompatibles, le système est incompatible. Ainsi,

$$\boxed{\mathscr{S} = \emptyset}$$

Remarque 7. — Un système linéaire admet :

- soit aucune solution (il est donc incompatible) ;
- soit une unique solution ;
- soit une infinité de solutions (quand il y a une (ou des) inconnues auxiliaires)

Définition 5. — Après avoir appliqué la méthode du pivot de Gauss, on obtient un système triangulaire. On appelle **rang** d'un système le nombre de pivot non nuls.

Exemple 5. — Dans les exemples précédents, le premier était de rang 3, et le deuxième est également de rang 3.

III. Systèmes de Cramer

1) Définition

Définition 6. — Un système carré d'ordre n est dit **de Cramer** s'il possède une unique n-liste solution.

Conséquence 1. — Un système homogène (S) de n équations linéaires à n inconnues est un système de Cramer si son unique solution est la n-liste $(0, 0, \cdots, 0)$.

2) Systèmes de Cramer et pivot de Gauss

Théorème 6.2.

Un système (S) carré d'ordre n est de Cramer si et seulement si la méthode du pivot de Gauss fait apparaitre n pivots successifs non-nuls, c'est-à-dire si et seulement si (S) est de rang n.

Exemple 6. — Montrer que le système suivant est de Cramer

$$(S)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ 2x & - & y & + & z & = & 0 \\ 2x & + & y & - & 2z & = & 0 \end{array}\right.$$

Solution. En appliquant la méthode du pivot de Gauss :

$$(S) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 0 \quad L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \quad L_2 \leftrightarrow L_3 \\ & - & 3y & + & 5z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & - & y & + & 2z & = & 0 \\ & & & - & z & = & 0 \quad L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

On a ainsi fait apparaitre les pivots $1, -1$ et -1 qui sont tous les trois non nuls : le système (S) est bien de Cramer.

3) Système de Cramer et système homogène associé

Théorème 6.3.

Un système (S) est de Cramer si et seulement si son système homogène associé est aussi de Cramer.

Démonstration. En effet, le choix des pivots dans la méthode des pivots de Gauss ne dépend pas du second membre. □

Méthode 6.4.

Pour montrer qu'un système quelconque est de Cramer, il suffit donc de montrer que son système homogène associé l'est, ce qui est plus simple.

Exercices

Exercice 1. — Résoudre les systèmes linéaires suivants :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & + & z & = & 1 \\ 2x & + & y & - & z & = & 2 \\ x & - & 2y & + & 3z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 3y & + & z & = & 4 \\ -x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 7x & + & 3y & - & 5z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} & & y & - & z & = & 1 \\ 2x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & z & = & 1 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & - & y & + & z & = & 3 \\ x & & & + & 2z & = & -1 \\ x & - & y & - & z & = & 2 \end{array}\right.$$

$$(S_5)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -3x & + & y & + & z & - & t & = & 0 \\ x & - & 3y & + & z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & - & 3z & + & t & = & 0 \\ x & + & y & + & z & - & 3t & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_6)\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} -x & + & 3y & & & - & t & = & 0 \\ 2x & - & y & + & 2z & + & 2t & = & 0 \\ & & 5y & + & 2z & & & = & 0 \\ x & + & 2y & + & 2z & + & t & = & 0 \end{array}\right.$$

Exercice 2. — Résoudre les systèmes suivants, en fonction de a, b, c et d :

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & a \\ x & - & y & - & z & = & b \\ -3x & + & y & + & 3z & = & c \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & - & 3y & - & 2z & = & a \\ -4x & + & 4y & + & 3z & = & b \\ 2x & - & 2y & - & z & = & c \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & y & - & 3z & = & a \\ 3x & + & y & - & 5z & = & b \\ 4x & + & 2y & - & z & = & c \\ x & & & - & 7z & = & d \end{array}\right.$$

Exercice 3. — Déterminer pour quelle(s) valeur(s) de λ les systèmes suivants sont de Cramer. Résoudre alors les systèmes.

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rcrcl} (2-\lambda)x & + & 3y & = & 0 \\ 3x & + & (2-\lambda)y & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_2)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (1-\lambda)x & - & y & - & z & = & 0 \\ -2x & + & (2-\lambda)y & + & 3z & = & 0 \\ 2x & - & 2y & + & (-3-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & & & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & (4+\lambda)y & + & 12z & = & 0 \\ x & - & 2y & + & (5-\lambda)z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (S_4)\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (3-\lambda)x & - & 2y & & & = & 0 \\ 2x & - & \lambda y & - & 4z & = & 0 \\ & & y & - & (3+\lambda)z & = & 0 \end{array}\right.$$