Chapitre 7

Nombres réels et suites numériques

Résumé

Dans ce chapitre, on reprend les notions connues sur les suites, ainsi que sur les limites de suites. On définit également les comparaisons de suites.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant les suites :
- Connaître la méthode de représentation des suites .... □
- Savoir démontrer des variations par étude de fonctions .... □
- Savoir démontrer des variations par la méthode $u_{n+1} - u_n$ .... □
- Savoir démontrer des variations par récurrence .... □
- Savoir démontrer une majoration par récurrence .... □
- Connaître les suites arithmétiques et géométriques .... □

② Concernant les limites :
- Connaître la définition mathématique des limites .... □
- Savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) .... □
- Savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison .... □
- Connaître les croissances comparées .... □
- Savoir reconnaître les suites adjacentes .... □

③ Savoir démontrer que deux suites sont équivalentes .... □

④ Savoir démontrer qu'une suite est négligeable par rapport à une autre .... □

⑤ Savoir utiliser les équivalences pour déterminer une limite de suite .... □.

I. Nombres réels

1) Ensembles usuels

Définition 1. — On dispose de plusieurs ensembles usuels :

- $\mathbb{N}$: l'ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$.
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des entiers naturels relatif : $\mathbb{Z} = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\}$.
- $\mathbb{D}$: l'ensemble des décimaux, c'est-à-dire l'ensemble des nombres ayant un nombre fini de décimales. On a également

$$\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^p}, \quad a \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{N}\right\}$$

- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels :

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q}, \quad p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z}^*\right\}$$

- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels.

Remarque 1. — On peut définir $\mathbb{R}$ comme l'ensemble "limite" des décimaux ou des rationnels. Soit x un réel quelconque. On note alors

$$d_n = [10^n x]\,10^{-n} \quad \text{et} \quad d'_n = [10^n x]\,10^{-n} + \frac{1}{10^n}$$

Par exemple, si $x = \pi$, on a

$$d_1 = 3.1, \quad d'_1 = 3.2, \quad d_2 = 3.14, \quad d'_2 = 3.15, \cdots$$

Alors on a

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \quad d_n \leqslant x \leqslant d'_n \quad \text{et} \quad |x - d_n| \leqslant 10^{-n}$$

Ainsi la suite (d_n) est une suite de décimaux qui se rapproche de x.
Cette définition n'est pas rigoureuse, mais donne une intuition de la construction des réels. (d_n) représente cependant une approximation décimale de x.

2) Propriétés de $\mathbb{R}$

Proposition 7.1.

On admet que $(\mathbb{R}, +, \times, \leqslant)$ est un corps totalement ordonnés, c'est-à-dire :

- $\forall\, (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z$.
- $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$.

A partir de ces propriétés, on obtient toutes les propriétés usuelles des inégalités.

Définition 2. — Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

- On appelle **majorant** de A tout nombre réel M tel que

$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \leqslant \mathrm{M}$$

- On appelle **minorant** de A tout nombre réel m tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \geqslant m$$
- On appelle **maximum** de A le réel $a \in \mathrm{A}$ tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \leqslant a$$
- On appelle **minimum** de A le réel $b \in \mathrm{A}$ tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{A}, \quad x \geqslant b$$

Ainsi, un maximum ou un minimum est un élément de A, mais pas forcément un majorant ou minorant.

Dès lors qu'on a un majorant, on a une infinité de majorants (car tout nombre supérieur à un majorant est également un majorant). On peut s'intéresser (s'il existe) au plus petit des majorants :

Définition 3. — Soit A une partie **non vide** majorée de $\mathbb{R}$. On appelle (si elle existe) **borne supérieure** de A le plus petit des majorants.

Définition 4. — Soit A une partie **non vide** minorée de $\mathbb{R}$. On appelle (si elle existe) **borne inférieure** de A le plus grand des minorants.

L'ensemble des réels possède une propriété remarquable et essentielle :

Théorème 7.2. Théorème de la borne supérieure

Toute partie non vide majorée admet une borne supérieure. Toute partie non vide minorée admet une borne inférieure.

Ainsi, dès lors que la partie est non vide et possède un majorant, elle admet automatiquement une borne supérieure.

Remarque 2. — ⚠ Attention : une borne supérieure n'est pas forcément un maximum ! Si on s'intéresse à l'ensemble
$$\mathrm{A} = \left\{1 - \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*\right\}$$
A est non vide ($0 \in \mathrm{A}$), et est majorée (par 1). Sa borne supérieure est 1, mais $1 \notin \mathrm{A}$, donc 1 n'est pas un maximum.

Propriété 1. — *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$, *et* ℓ *sa borne supérieure. Alors pour tout majorant* M *de* A, *on a* $\ell \leqslant \mathrm{M}$.

Démonstration. En effet, ℓ est le plus petit des majorants. □

Propriété 2. — *Soit* A *une partie non vide majorée de* $\mathbb{R}$, *et* ℓ *sa borne supérieur. Alors, pour tout nombre réel* $m < \ell$, *il existe un élément* $a \in \mathrm{A}$ *tel que* $a \geqslant m$.

Démonstration. En effet, si ce n'est pas le cas, m est un majorant plus petit que ℓ, ce qui est impossible puisque ℓ est le plus petit des majorants. □

II. Généralités sur les suites

1) Définition et notations

Définition 5. — Une **suite numérique réelle** est une fonction de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.

Notation 1. — Soit u une suite.

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

La suite u peut aussi se noter $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). L'élément u_n est appelé **terme de rang** n de la suite u.

2) Trois types de définition de suites

On peut définir une suite de trois manières différentes.

a) Définition explicite

La suite peut être définie explicitement :

- v est la suite définie par $v_n = \frac{3^n}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- u est la suite définie par u_n est la $n^{\text{è}}$ décimale de π, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
- w est la suite définie par

$$\begin{cases} w_n = 3n+2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ w_n = \dfrac{1}{n} + 4 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

b) Définition par récurrence

Elle peut également être définie par récurrence :

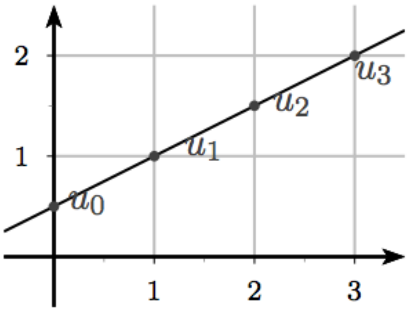
- u est la suite définie par $u_0 = -1$ et, pour $n \geqslant 0$, $u_{n+1} = 2 \times u_n - 1$.
- $\begin{cases} u_0 = & 2 \\ \forall\ n,\ u_{n+1} = & \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$

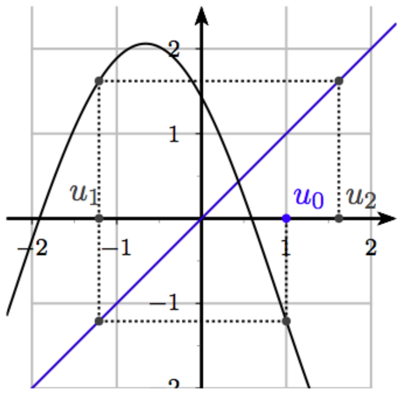
c) Définition implicite

Une suite peut également être définie par une équation. Par exemple, soit (u_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 3$ par u_n est l'unique solution de l'équation $\ln(x) = nx$.

3) Représentation graphique d'une suite

On représente une suite définie explicitement par l'ensemble des points $(n; u_n)$. On peut également représenter les suites définies par récurrence par une représentation “en toile d'araignée”.





Définition $u_n = f(n)$ Définition par récurrence, $u_0 = 1$

III. Monotonie, majoration, minoration

1) Suites monotones

Définition 6. — Soit (u_n) une suite.
On dit que (u_n) est une suite **croissante** si $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout n.
On dit que (u_n) est une suite **décroissante** si $u_n \geqslant u_{n+1}$ pour tout n.
Une suite **monotone** est une suite soit croissante, soit décroissante.

Remarque 3. —

- On a aussi des suites strictement croissantes ou strictement décroissantes.
- Une suite peut n'être monotone qu'à partir d'un certain rang n_0, c'est à dire $u_n \leqslant u_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_0$ (par exemple).

2) Méthodes de recherche des variations d'une suite

a) Pour les suites $u_n = f(n)$

Théorème 7.3.

Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est croissante.
Si f est décroissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration. Si f est croissante sur $\mathbb{R}^+$:

$$n < n+1 \implies u_n = f(n) \leqslant f(n+1) = u_{n+1}$$

□

Exemple 1. —

- Soit u la suite définie par $u_n = n^2$ pour tout n. La fonction $x \mapsto x^2$ étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, la suite (u_n) est strictement croissante.
- La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n}$ pour $n \geqslant 1$ est strictement décroissante, car la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Méthode 7.1.

Pour étudier la monotonie d'une suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = f(n)$, on introduit la fonction f associée, et on étudie ses variations. On en déduit alors la monotonie de u.

Exercice 1. — Soit u la suite définie pour tout entier n par $u_n = n^2 - 4n + 2$. Déterminer la monotonie de u.

Solution. Introduisons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 2$. f étant un trinôme du second degré, on connait ses variations : ici, $a = 1 > 0$, $b = -4$ donc $-\frac{b}{2a} = 2$. Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty; 2]$ et est croissante sur $[2; +\infty[$.
La suite (u_n) est donc croissante pour $n \geqslant 2$.

b) Termes consécutifs

Théorème 7.4. Etude de la différence de deux termes consécutifs

Soit une suite u donnée. On peut étudier le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$.
Si $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est croissante.
Si $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ pour tout n, alors la suite u est décroissante.

Théorème 7.5. Etude du quotient de deux termes consécutifs

Soit une suite u à termes **strictement positifs**, on peut utiliser :
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ (resp. > 1) alors la suite u est croissante (resp. strictement croissante).
Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ (resp. < 1) alors la suite u est décroissante (resp. strictement décroissante).

Remarque 4. — Cette méthode est, en général, reservée aux suites définies par des puissances.

Exemple 2. —

- Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2+1}$ pour tout n. Alors, pour tout n, on a $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2+1} > 0$: la suite (u_n) est donc strictement croissante.
- La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{5^n}{2^{n+1}}$ est strictement croissante. En effet, elle est à termes strictement positifs, et on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{5^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{5^n}{2^{n+1}}} = \frac{5^{n+1}}{2^{n+2}} \cdot \frac{2^{n+1}}{5^n} = \frac{5}{2} > 1$$

Conséquence 1. —

- Si $a > 1$, la suite (a^n) est strictement croissante.
- Si $a = 1$, la suite (a^n) est constante.
- Si $0 < a < 1$, la suite (a^n) est strictement décroissante.

Démonstration. Pour tout réel $a > 0$, on constate que la suite (a^n) est à termes strictement positifs. Enfin, en notant pour tout entier n, $u_n = a^n$, on a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{a^{n+1}}{a^n} = a$$

Ainsi, la suite (a^n) est strictement croissante si $a > 1$, et strictement décroissante si $a < 1$. Elle est enfin constante si $a = 1$.

□

c) Par récurrence

Méthode 7.2.

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut étudier sa monotonie par récurrence, en prenant comme hypothèse de récurrence P_n : "$u_{n+1} \geqslant u_n$" pour montrer que la suite est croissante, ou P_n : "$u_{n+1} \leqslant u_n$" pour montrer qu'elle est décroissante.

Exemple 3. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$. Montrer que la suite u est croissante.

Solution. Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n :"$u_{n+1} \geqslant u_n$".

- **initialisation** : $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{2} \geqslant u_0$. Donc P_0 est vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $$u_{n+1} \geqslant u_n \Rightarrow u_{n+1}+1 \geqslant u_n+1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+1} \geqslant \sqrt{u_n+1} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

  Donc $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_{n+1} \geqslant u_n$. La suite u est donc croissante.

3) Suites majorées, minorées, bornées

Définition 7. —

- Une suite (u_n) est dite **minorée** s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $m \leqslant u_n$ pour tout n. m s'appelle un **minorant**.
- Une suite (u_n) est dite **majorée** s'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $M \geqslant u_n$ pour tout n. M s'appelle un **majorant**.
- Une suite **bornée** est une suite à la fois majorée et minorée : il existe deux réels m et M tels que pour tout n :

$$m \leqslant u_n \leqslant M$$

Exemple 4. — La suite u définie par $u_n = \frac{1}{n+1}$ est bornée :

$$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

Méthode 7.3.

Dans le cas d'une suite définie par récurrence, on peut également montrer qu'elle est bornée par récurrence.

Exemple 5. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Montrer que, pour tout n, $u_n \leqslant 2$.

Solution. Soit (P_n) la propriété définie pour tout n par P_n : "$u_n \leqslant 2$".

- **initialisation** : $u_0 = 1 \leqslant 2$. P_0 est donc vraie.
- **hérédité** : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain n. Alors

  $$u_n \leqslant 2 \Rightarrow u_n + 2 \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \leqslant \sqrt{4} \text{ car la fonction racine est croissante sur } \mathbb{R}^+$$

  Donc $u_{n+1} \leqslant 2$: la propriété est héréditaire.
- **conclusion** : la propriété est donc vraie pour tout n : $\forall\ n,\ u_n \leqslant 2$. La suite u est donc majorée par 2.

IV. Suites arithmétiques et géométriques

1) Suites arithmétiques

Définition 8. — Une **suite arithmétique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = u_n + a \text{ où } a \in \mathrm{R} \end{cases}$$

Le réel a est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 6. — La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = u_n + 2$ est une suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 7.6.

Soit u une suite arithmétique, de premier terme u_0 et de raison a. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 + na$$

Démonstration. Soit P_n la proposition "$u_n = u_0 + na$" définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 + 0 \times a$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

  $$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{déf de } u} u_n + a \underbrace{=}_{\text{HR}} (u_0 + na) + a = u_0 + (n+1)a$$

  P_{n+1} est donc vraie.

- La proposition P_n, d'après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

On peut également démontrer ce théorème par téléscopage. □

Remarque 5. — Si u est une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison a, on a également

$$\forall\ (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ u_n = u_p + (n-p)a$$

Exemple 7. — Soit u une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2-3n$.

Théorème 7.7.

Soit u une suite arithmétique, de raison a. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\frac{u_p+u_n}{2} = (\text{nb de terme}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier terme}}{2}$$

Démonstration. Soit $S = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n$. D'une part

$$S = u_p + (u_p + a) + (u_p + 2a) + \cdots + (u_p + (n-p)a)$$

et d'autre part

$$S = u_n + (u_n - a) + (u_n - 2a) + \cdots + (u_n - (n-p)a)$$

En sommant les deux égalités,

$$2S = (u_p + u_n) + (u_p + u_n) + \cdots + (u_p + u_n)$$

Avec $n-p+1$ termes. On a donc $2S = (n-p+1)(u_p+u_n)$, ce qui donne le résultat.
On aurait pu également le démontrer par récurrence sur n. □

Exemple 8 (Classique)**.** — En s'intéressant à la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison 1, on a

$$1+2+\cdots+n = n\frac{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Suites géométriques

Définition 9. — Une **suite géométrique** est une suite (u_n) définie par une formule de récurrence de la forme

$$\begin{cases} u_0 \text{ est donné} \\ \forall\ n, u_{n+1} = q \times u_n \text{ où } q \in \mathrm{R} \end{cases}$$

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n), et u_0 est le **premier terme**.

Exemple 9. — La suite u définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = 2u_n$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 1$.

Théorème 7.8.

Soit u une suite géométrique, de premier terme u_0 et de raison q. Alors, pour tout entier n,

$$u_n = u_0 \times q^n$$

Démonstration. Soit P_n la proposition “$u_n = u_0 \times q^n$” définie pour tout entier n.

- Initialisation : pour $n = 0$ on a bien $u_0 = u_0 q^0$: P_0 est donc vraie.
- Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n. Alors, on a

$$u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} q \times u_n \underbrace{=}_{\text{HR}} q \times (u_0 \times q^n) = u_0 \times q^{n+1}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- La proposition P_n, d’après le principe de récurrence, est donc vraie pour tout n.

□

Remarque 6. — Si u est une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q, on a également

$$\forall\ (n, p) \in \mathbb{N}^2,\ u_n = u_p \times q^{n-p}$$

Exemple 10. — Soit u une suite géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison -3. Alors, pour tout entier n, $u_n = 2 \times (-3)^n$.

Théorème 7.9.

Soit u une suite géométrique, de raison q. Soient n et p deux entiers tels que $p \leqslant n$. Alors,

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \frac{u_p - q u_n}{1 - q} = \frac{\text{1er terme} - \text{terme à suivre}}{1 - \text{raison}}$$

Démonstration. Soit p un entier fixé. Soit P_n la proposition “$u_p + \cdots + u_n = \frac{u_p - q u_n}{1-q}$” définie pour tout entier $n \geqslant p$.

- Initialisation : $\frac{u_p - q u_p}{1-q} = u_p \frac{1-q}{1-q} = u_p$: P_p est donc vraie.
- Hérédité : supposons la propriété P_n vraie pour un certain entier $n \geqslant p$. Alors

$$u_p + \cdots + u_n + u_{n+1} \underbrace{=}_{\text{HR}} \frac{u_p - q u_n}{1 - q} + u_{n+1} = \frac{u_p - q u_n + u_{n+1} - q u_{n+1}}{1 - q} \underbrace{=}_{\text{dèf de } u} \frac{u_p - q u_{n+1}}{1 - q}$$

  P_{n+1} est donc vraie.
- D’après le principe de récurrence, la proposition P_n est donc vraie pour tout $n \geqslant p$.

□

Exemple 11 (Classique)**.** — En s’intéressant à la suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison q, on a

$$1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q q^n}{1 - q} = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

V. Limites de suites

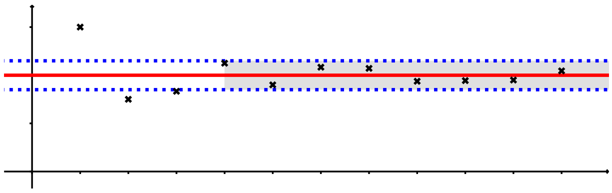
1) Limite finie

Définition 10. — Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite ℓ**, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ \ n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$

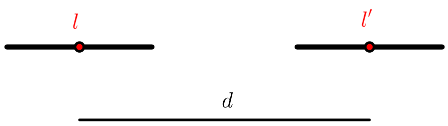


Exemple 12. — La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Propriété 3. — *Si une suite (u_n) a une limite finie, celle-ci est **unique**.*

Démonstration. On suppose que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' et que $\ell \neq \ell'$. Donc la distance entre ℓ et ℓ' est non nulle. On la note d, et on s'intéresse aux deux intervalles $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$ et $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$. Par définition de la convergence, tous les termes de la suite sont dans ces deux intervalles à partir d'un certain rang. Or :



les deux intervalles sont disjoints, ce qui est absurde. □

2) Limite infinie

Définition 11. — Soit (u_n) une suite.

- Si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$, et on note

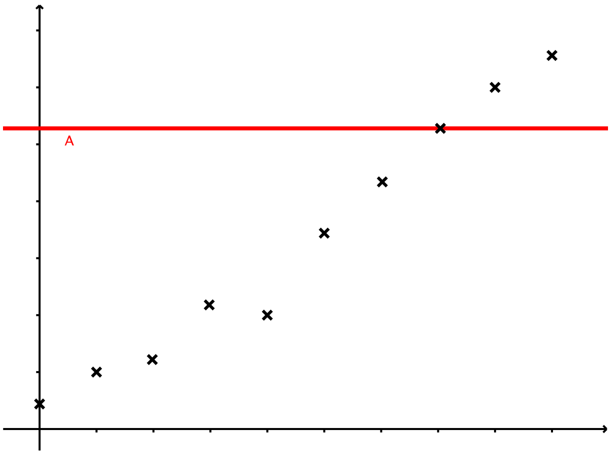
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

- Si tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Exemple 13. — La suite u définie pour tout n par $u_n = n$ a pour limite $+\infty$, et la suite v définie pour tout n par $v_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$$

Algorithme 1. — Si une suite **croissante** (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) :

Algorithme 1 : SEUIL

Entrées : Saisir A (nombre positif)
Initialisation :
$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow u_0$
Tant que $U \leqslant A$
  $n \leftarrow n+1$
  $U \leftarrow u_n$
FinTantque
Sorties : Afficher n

En scilab, pour la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$$

on obtient :

Programme Scilab 1 : Seuil pour une suite croissante

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 21/06/2015
// Résumé : programme déterminant le premier entier n tel que
// un > a, où a est un réel donné et u une suite de limite +oo
```

```
n=0;
u=1;
// Valeur de seuil
seuil=100;

while(u<=seuil)
  // On n'a pas dépassé le seuil.
  // On passe au rang suivant
  n=n+1;
  // On calcule le terme suivant de la suite
  u=1+u^2;
end

// Ainsi, n contient le premier rang à partir duquel u_n > seuil
```

3) Suite convergente

Définition 12. — On dit qu'une suite est **convergente** si elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** si elle possède une limite infinie.

4) Suite sans limite

Remarque 7. — Certaines suites ne possèdent aucune limite, que ce soit finie ou infinie.

Exemple 14. — La suite $((-1)^n)$ prend la valeur 1 aux termes pairs, et -1 aux termes impairs. Elle ne peut donc ni converger, ni diverger : elle ne possède donc pas de limite.

VI. Théorèmes sur les limites

1) Théorème de comparaison

Théorème 7.10.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

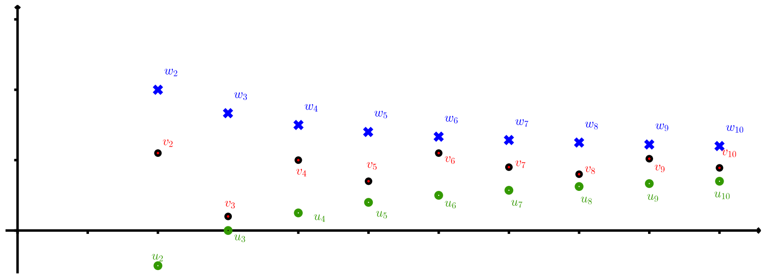
Démonstration. Supposons au contraire que $\ell > \ell'$. En notant d la distance (non nulle) entre ℓ et ℓ', cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) se trouve dans l'intervalle $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$. Or, $v_n \geqslant u_n$, donc, à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \ell - \frac{d}{4}$. Donc l'intervalle $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$ ne contient aucun élément de la suite (v_n) à partir d'un certain rang : absurde. □

2) Théorème d'encadrement

Théorème 7.11. Théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et ℓ un réel. On suppose que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = \ell$. Alors,

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$



Remarque 8. — Ce théorème est également appelé théorème des gendarmes.

Démonstration. Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
Par définition de la limite, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, u_n soit dans I. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, w_n soit dans I.
Mais alors, pour tout n plus grand que n_1 **et** n_2, $u_n \in \mathrm{I}$ et $w_n \in \mathrm{I}$. Or, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et puisque I est un intervalle, on en déduit que pour tout n plus grand que n_1 et n_2, $v_n \in \mathrm{I}$.
Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on en déduit bien que $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$. □

Méthode 7.4.

Pour déterminer la limite d'une suite où $(-1)^n$ apparait, ou bien des cos ou sin, on appliquera (quasi) systématiquement le théorème d'encadrement.

Exemple 15. — Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$$

Solution. Pour tout $n \neq 0$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3$ et puisque $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n + 2}{n} \leqslant \frac{3}{n}$$

Or, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n} = 0$$

Théorème 7.12.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ un réel. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$,
$|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration. Application du théorème d'encadrement. □

Exemple 16. — On constate que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite 0.

Théorème 7.13. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration. Démontrons le premier point. Soit A un réel strictement positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \in [a;+\infty[$. Or, puisque pour tout n, $u_n \geqslant v_n$, on a également $u_n \in [a;+\infty[$ pour $n \geqslant n_0$.
Par définition de la limite infinie, cela signifie donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ □

3) Convergence des suites monotones

Théorème 7.14. Théorème de convergence monotone

Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Démonstration. Si (u_n) est une suite croissante, constatons que l'ensemble

$$A = \{u_n, \quad n \in \mathbb{N}\}$$

est non vide et majorée (puisque la suite est majorée). Elle possède donc une borne supérieure qu'on note ℓ. On montre alors que ℓ est la limite de (u_n). □

Théorème 7.15.

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. La suite étant non majorée, quel que soit le réel a, on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à a. On a donc $u_N > a$.
Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > a$. Tous les termes de la suite u sont donc dans l'intervalle $]a;+\infty[$ a partir d'un certain rang. Ceci étant vrai pour tout a, par définition, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

□

Exemple 17. — La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante, non majorée : sa limite est $+\infty$.
La suite v définie pour tout $n > 0$ par $v_n = 1 - \frac{1}{n}$ est croissante, majorée (par 1) : elle converge donc.

Théorème 7.16.

Soit (u_n) une suite **croissante** de limite ℓ. Alors, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \ell$.

Démonstration. Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Notons $r = u_{n_0} - \ell > 0$. Par croissance de la suite u, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$. Mais alors, l'intervalle $]\ell - r; \ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite à partir de n_0. Cela contredit le fait que la suite u converge vers ℓ : ceci est absurde. □

VII. Opération sur les limites

1) Limites usuelles

Proposition 7.17.

On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \ (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \ (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} |n| = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \ (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0 \ (\alpha \in \mathbb{R}_-^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

2) Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

3) Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

4) Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$l' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

5) Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	0	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

6) Limite de (q^n)

Théorème 7.18.

Soit q un nombre réel. On s'intéresse à la suite (q^n).

- Si $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
- Si $-1 < q < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$.
- Si $q \leqslant -1$, la suite (q^n) ne possède pas de limite.

Démonstration. Tout part de l'inégalité de Bernoulli, qui se démontre à l'aide d'une récurrence : pour tout $x > 0$, et pour tout entier n, on a

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx$$

- Si $q > 1$, on peut écrire $q = 1 + x$ avec $x = q - 1 > 0$. D'après l'inégalité de Bernoulli

  $$q^n \geqslant 1 + nx = 1 + n(q-1)$$

  Or, puisque $q - 1 > 0$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} 1 + n(q-1) = +\infty$$

  Par théorème d'encadrement,

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n = +\infty$$

- Si $q = 1$, la suite (q^n) est la suite constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- Si $-1 < q < 1$, posons $\mathrm{Q} = \frac{1}{|q|} > 1$. Alors, d'après ce qui précède

  $$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = +\infty$$

  Or, on a

  $$0 \leqslant |q|^n = \left(\frac{1}{\mathrm{Q}}\right)^n = \frac{1}{\mathrm{Q}^n}$$

  Par théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{Q}^n = +\infty$ on a

  $$\lim_{n\to+\infty} |q|^n = 0 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} q^n = 0$$

- Si $q = -1$, la suite $(-1)^n$ vaut 1 pour les termes pairs, et -1 pour les termes impairs. Elle ne peut donc converger.
- Si $q < -1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n = +\infty$. Donc la suite $(|q|^n)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Or, la suite (q^n) prend des valeurs positives pour les termes pairs, et négatives pour les termes impairs. Elle ne peut donc pas avoir de limite.

$\square$

Méthode 7.5.

Pour déterminer la limite d'une suite composée de puissances, on met les plus grandes puissances en facteur, et on utilise le résultat précédent.

Exercice 2. — Soit u la suite définie pour tout entier n par

$$u_n = \frac{3^n + 4^n}{3 \times 4^n + 2^n}$$

Déterminer la limite de la suite u.

Solution. Pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{4^n\left(1 + \frac{3^n}{4^n}\right)}{4^n\left(3 + \frac{2^n}{4^n}\right)} = \frac{1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n}{3 + \left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{2}{4} < 1$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$

Par somme et quotient, on en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

7) Croissances comparées

Théorème 7.19.

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{e^n}{n^a} = +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^a}{\ln^b(n)} = +\infty$$

et de manière générale, pour $q > 1$,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

Démonstration. Voir chapitre Limite de fonctions. □

Exemple 18. — On a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{e^n} = 0 \text{ et } \lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

Exercice 3. — Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n+\ln(n)}{n+1}$.

Solution. On constate que, pour tout $n>0$:

$$\frac{n+\ln(n)}{n+1} = \frac{n\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+\frac{\ln(n)}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(n)}{n} = 0$. Par somme, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{\ln(n)}{n} = 1$. On a également $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+\dfrac{1}{n} = 1$. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(n)}{n+1} = 1$$

VIII. Suites adjacentes

Définition 13. — On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$.

Exemple 19. — Les suites u et v définies pour tout $n \geqslant 1$ par $u_n = -\frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Théorème 7.20.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration. On montre que la définition des suites adjacentes entraîne que, pour tout n, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$: en effet, la suite $(v_n - u_n)$ est décroissante par construction, et de limite 0 : cela implique que tous les termes de la suite $(v_n - u_n)$ sont positifs.
La suite (u_n) est donc croissante majorée : elle converge, vers une limite que l'on note ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante minorée : elle converge, vers ℓ'. Or, par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - u_n = 0$. Par opération sur les limites, cela implique $\ell - \ell' = 0$, soit $l = l'$. □

Méthode 7.6.

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on montre qu'une est croissante, l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

Exercice 4. — Soient u et v deux suites définies par

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!} \quad \text{et} \quad v_n = u_n + \frac{1}{n\times n!}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Solution. Pour tout entier n, on a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$
donc la suite (u_n) est croissante. De même
$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \left(u_n + \frac{1}{nn!}\right) = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{nn!}$$
Après mise au même dénominateur
$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!} = \frac{-1}{n(n+1).(n+1)!} < 0$$
donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin $v_n - u_n = \frac{1}{n.n!}$ et
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n.n!} = 0 \quad \text{par quotient}$$
Bilan : les suites u et v sont bien adjacentes.

Remarque 9. — Etant adjacentes, elles convergent, et ont la même limite. On peut montrer que leur limite commune est e.

IX. Comparaison de suites

L'idée de cette section est d'introduire des méthodes de comparaison de suites, permettant de déduire certains résultats sur les limites.

1) Négligeabilité

Définition 14. — Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de $+\infty$ si et seulement si
$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$
On note alors $u_n = o_{+\infty}(v_n)$, ou plus simplement $u_n = o(v_n)$, et on lit "u est un petit o de v au voisinage de $+\infty$.

Exemple 20. — On a $n = o(n^2)$.

Solution. En effet, $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Propriété 4 (Opérations sur la négligeabilité)**.** — *Soient u, v et w trois suites non nulles à partir d'un certain rang.*

① *(Multiplication par un réel) Si $u_n = o(v_n)$ alors pour tout réel k, $ku_n = o(v_n)$.*

② *(Quotient) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$ et $\frac{u_n}{w_n} = o\left(\frac{v_n}{w_n}\right)$.*

③ *(Transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.*

④ *(Somme) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.*

Remarque 10. — Attention : pour la somme, il faut que les suites soient négligeables par rapport à une même suite.

Exercice 5. — Montrer que $\mathrm{e}^{-n} = o(n^4)$ et que $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Solution. Remarquons que

$$\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^4} = \frac{1}{\mathrm{e}^n n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par quotient.}$$

Enfin, $\ln(n) = o(n^4)$ et $n^2 = o(n^4)$ (par croissances comparées). Par somme, $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Remarque 11. — Une suite vérifiant $u = o(1)$ est une suite qui tend vers 0.

Proposition 7.21. Croissances comparées

On peut écrire les croissances comparées ainsi : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:

$$n^\alpha = o(\mathrm{e}^n), \qquad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad \text{si } \alpha < \beta, \quad n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^n = o(n!)$$

2) Équivalence

Définition 15. — Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si

$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exemple 21. — On a $n^2 + n \sim n^2$.

Solution. En effet, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque 12. — On dispose d'une autre définition : u et v sont équivalentes si et seulement si

$$u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)$$

En effet,

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conséquence 2. — Soient deux suites u et v équivalentes. Alors

- Si u converge vers ℓ, v converge également vers ℓ.
- Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, v est également de signe constant et de même signe à partir d'un certain rang.

Propriété 5 (Opérations sur les équivalents). — *Soient u, v, w et x quatre suites non nulles à partir d'un certain rang.*

① *(Compatibilité avec la multiplication) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.*

② *(Compatibilité avec le quotient) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.*

③ *(Compatibilité avec les puissances) Si les suites u et v sont strictement positives, et telles que $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.*

Démonstration. Les preuves se font en utilisant la définition. Par exemple, remarquons que

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$$

□

Remarque 13. — ⚠ Attention : en général, on ne peut ni ajouter, ni soustraire des équivalents.

Exercice 6. — Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4}$$

Solution. Puisque $\ln(n) = o(n^4)$, on a $\ln(n) + n^4 \sim n^4$. De même, $1 - n^4 \sim -n^4$. Par quotient

$$\frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4} \sim \frac{n^4}{-n^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n) + n^4}{1 - n^4} = -1$$

Proposition 7.22. Formule de Stirling

On dispose d'un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque 14. — On retrouve, grâce à ce résultat, que $q^n = o(n!)$.

Exercices

Sens de variation, majoration, minoration

Exercice 7. —

- Soit u la suite définie pour tout n par $u_n = \frac{n-1}{n+2}$. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
- Etudier le sens de variation des suites $\left(\frac{n^2+1}{n}\right)$, $\left(\frac{2^n}{n}\right)$ et $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$

Exercice 8. — Déterminer si les suites suivantes sont majorées, minorées, ou bornées.

- La suite u définie par $u_n = \dfrac{n+2}{2n+1}$.
- La suite v définie par $v_n = \dfrac{n^2+2}{n}$.

Suites et récurrence

Exercice 9. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$$

1. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. Démontrer par récurrence que (u_n) est croissante.

Exercice 10. — Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Etudier la monotonie de la suite (u_n).
2. Démontrer par récurrence que
$$\forall\, n,\ u_n > n^2$$
3. Conjecturer, puis démontrer, une expression de u_n en fonction de n.

Exercice 11. — On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = & 2 \\ \forall\, n,\ u_{n+1} & = & \sqrt{4u_n - 3} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n, $1 \leqslant u_n \leqslant 3$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Suites arithmétiques et géométriques

Exercice 12. — Les suites suivantes sont elles arithmétiques ? géométriques ?

1. La suite u définie pour tout n par $u_n = 3n + 5$.
2. La suite v définie pour tout n par $v_n = \frac{n+1}{n^2+1}$.
3. La suite w définie pour tout n par $w_n = 3 \times 2^n$.

Exercice 13. — Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.

- Sachant que $r = 2$, et $u_4 = 30$, déterminer u_0 et u_8. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_8$.
- Sachant que $u_4 = 35$ et $u_2 = 15$, déterminer r et u_0. Déterminer $u_0 + u_1 + \cdots + u_4$.
- Soit (v_n) une suite géométrique de raison q. Sachant que $u_2 = 5$ et $u_3 = 7$, déterminer q et u_4.

Exercices bilans

Exercice 14. — Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel par $u_0 = 2$ et

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 1}{u_n + 3}$$

1. Démontrer que si $u_{n+1} = 1$ alors $u_n = 1$. En déduire que pour tout n, $u_n \neq 1$.
2. On pose pour tout entier n, $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$. Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique, puis exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n.

Exercice 15. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1 + u_n}$$

1. Calculer u_1 et u_2. La suite (u_n) est-elle arithmétique ? Géométrique ?
2. Démontrer que si $u_{n+1} = -2$ alors $u_n = -2$. En déduire que pour tout n,
$$u_n \neq -2$$
3. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
4. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Calculer v_0, v_1 et v_2. Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. Quelle est sa raison ?
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
   (d) Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n. Que vaut u_{10} ?

Exercice 16. — On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$u_0 = 2 \text{ et pour tout } n \in \mathbb{N},\ \ v_n = \frac{2}{u_n} \text{ et } u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Calculer v_0; u_1; v_1; u_2; v_2. On donnera les résultats sous forme de fraction irréductible.
2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont majorées par 2 et minorées par 1.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{(u_n - v_n)^2}{2(u_n + v_n)}$$

4. Montrer que pour tout n, $u_n \geqslant v_n$.
5. Montrer que (u_n) est décroissante, et (v_n) est croissante.
6. Montrer que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant 1$, et en déduire que $(u_n - v_n)^2 \leqslant u_n - v_n$.
7. Montrer que pour tout n,

$$u_{n+1} - v_{n+1} \leqslant \frac{1}{4}(u_n - v_n)$$

En déduire que pour tout n, $u_n - v_n \leqslant \frac{1}{4^n}$.

Limites générales

Exercice 17. — Déterminer les limites des suites suivantes.

1. $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$
2. $u_n = \dfrac{2n+1}{1-4n}$
3. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n-1}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n + 4}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{2(-1)^{n^3+1}}{n+2}$
6. $u_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$
7. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2-3n}$
8. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n+1}$
9. $u_n = \dfrac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n}$
10. $u_n = \dfrac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$

Suites et limites

Exercice 18. — On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.

   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

   (c) Exprimer v_n en fonction de n.

3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 19. — On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier n, $w_n > 0$
   (d) Déterminer la limite de la suite (w_n).
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) est (v_n) sont adjacentes, et qu'elles ont la même limite que l'on notera l dans la suite du problème.
4. Soit t la suite définie pour tout entier naturel par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) Déterminer alors la valeur de l.

Exercice 20. — On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 20$, $v_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$$

1. Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique, à termes positifs.
   (b) Déterminer la limite de (w_n), et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout entier n, on pose $t_n = 5u_n + 24v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et déterminer la limite de (u_n) et (v_n).