Chapitre 8

Polynômes

Résumé

Dans ce chapitre, on introduit un objet qui servira régulièrement, et qui a déjà été vu, en partie, au lycée.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Savoir manipuler la notion de degré (définition, opérations) .... □
② Savoir manipuler la notion de dérivation de polynôme .... □
③ Connaître le principe de la division euclidienne .... □
④ Connaître la notion de racine, et de multiplicité .... □
⑤ Savoir factoriser un polynôme dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$ .... □
⑥ Connaître la notion de pôle d'une fraction rationnelle .... □
⑦ Savoir déterminer la décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle .... □

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels $\mathbb{R}$ ou le corps des complexes $\mathbb{C}$.

I. Définitions

1) Notion de polynômes

Notation 1. — Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on introduit les fonctions $\begin{array}{rccc} \mathrm{X}^i : & \mathbb{K} & \mapsto & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & x^i \end{array}$ et la fonction $\begin{array}{rccc} \mathrm{X}^0 : & \mathbb{K} & \mapsto & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$

Définition 1. — On appelle **polynôme à coefficients dans** $\mathbb{K}$ toute somme finie d'applications précédentes, c'est-à-dire toute fonction s'écrivant sous la forme

$$\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k\mathrm{X}^k$$

avec $n \in \mathbb{N}$ et $\forall\ k \in [\![0, n]\!]$, $a_k \in \mathbb{K}$.

- Les nombres a_k sont appelés les **coefficients** du polynôme P.
- Si $a_n \neq 0$, on dit que P est de **degré** n et on note $\deg(\mathrm{P}) = n$. Dans ce cas, a_n est appelé **coefficient dominant** du polynôme P.
- La **fonction polynôme associée** au polynôme P est la fonction, encore notée P, définie sur $\mathbb{K}$ par $\mathrm{P} : x \mapsto a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$.
- Un polynôme est dit **unitaire** si son coefficient dominant vaut 1.

Exemple 1. — Le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^4 - 2\mathrm{X}^2 + 1$ est un polynôme de degré 4 et de coefficient dominant 1. Sa fonction polynôme associée est la fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1$. Ainsi, $\mathrm{P}(1) = 1^4 - 2 \times 1^2 + 1 = 0$.

Remarque 1. — Attention : la notation P(X) représente une fonction (c'est une représentation **formelle**). On peut ainsi parler du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 1$ plutôt que de parler de la fonction polynôme P définie pour tout $x \in \mathbb{K}$ par $\mathrm{P}(x) = x^2 - 1$.

Notation 2. — On note $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, et $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n.
Ainsi, $\mathbb{K}_1[\mathrm{X}] = \{a\mathrm{X} + b, (a, b) \in \mathbb{K}^2\}$ et $\mathbb{K}_2[\mathrm{X}] = \{a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c, (a, b, c) \in \mathbb{K}^3\}$.

2) Degré

Propriété 1. — *Soient* P *et* Q *deux polynômes.*

- *Le degré d'un polynôme constant non nul est* 0.
- $\deg(\mathrm{P} + \mathrm{Q}) \leqslant \max(\deg(\mathrm{P}), \deg(\mathrm{Q}))$
- $\deg(\mathrm{PQ}) = \deg(\mathrm{P}) + \deg(\mathrm{Q})$.

Démonstration. On note n le degré de P et m le degré de Q. Ainsi, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = a_n\mathrm{X}^n + \cdots + a_0$ et $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = b_m\mathrm{X}^m + \cdots + b_0$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$.

- On a $(P+Q)(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 + b_m X^m + \cdots + b_0$. Par construction, le degré de $P+Q$ est égale au plus grand des deux degrés, sauf si $n = m$ et $a_n = -b_m$, et dans ce cas, le degré est strictement inférieur à n. Dans tous les cas $\deg(P+Q) \leqslant \max(\deg(P), \deg(Q))$.
- Quand on développe $P(X)Q(X)$, le terme de plus haut degré est le terme $a_n X^n b_m X^m = a_n b_m X^{n+m}$ (avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$). Donc $\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q)$.

□

Remarque 2. — Le polynôme nul est le polynôme dont tous les coefficients sont nuls. Par convention, on dit qu'il est degré $-\infty$.

3) Dérivée d'un polynôme

Définition 2. — Soit $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_1 X + a_0 \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme. On appelle **polynôme dérivé**, et on note P', le polynôme définie par

$$P'(X) = n a_n X^{n-1} + (n-1) a_{n-1} X^{n-2} + \cdots + 2a_2 X + a_1$$

Remarque 3. — On peut dérivée à nouveau P' et on note P'' ou $P^{(2)}$ la dérivée seconde de P. Plus généralement, on note $P^{(k)}$ la dérivée k-ième de P.

Exemple 2. — Soit $P(X) = 3X^3 + 2X^2 - 1$. Alors $P'(X) = 9X^2 + 4X$, $P^{(2)}(X) = 18X + 4$, $P^{(3)}(X) = 18$ et $P^{(4)}(X) = 0$.

Remarque 4. —

- Si $\deg(P) = n \geqslant 1$, alors $\deg(P') = n - 1$.
- Si $\deg(P) = n$, alors $\forall\ k > n, \quad P^{(k)} = 0$.

II. Egalité de polynômes et identification

1) Egalité de polynômes

Théorème 8.1.

Soient $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q(X) = \sum_{k=0}^{m} b_k X^k$ deux polynômes. Alors $P = Q$ si et seulement si

$$n = m \quad \text{et} \quad \forall\ k \in [\![0; n]\!], \quad a_k = b_k$$

Ainsi, deux polynômes sont égaux si et seulement s'ils ont même degré, et mêmes coefficients.

Exemple 3. — Soient $P(X) = 2X^2 + 3X - 1$ et $Q(X) = 2X^2 + aX - b$. Alors $P = Q$ si et seulement si $a = 3$ et $b = 1$.

2) Application à l'identification

Exemple 4. — Soit $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 - 3\mathrm{X} + 2$. Déterminer trois réels a, b, c tels que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$$

Solution. Soit $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-2)(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c)$. En développant,

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = a\mathrm{X}^3 + b\mathrm{X}^2 + c\mathrm{X} - 2a\mathrm{X}^2 - 2b\mathrm{X} - 2c = a\mathrm{X}^3 + (b-2a)\mathrm{X}^2 + (c-2b)\mathrm{X} - 2c$$

Pour que P = Q, par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :

$$\left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b-2a & = & -1 \\ c-2b & = & -3 \\ -2c & = & 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & 1 \\ c & = & -1 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (\mathrm{X}-2)(\mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1)$.

Exercice 1. — Trouver deux réels a et b tels que,

$$\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}, \quad \frac{1}{x^2-1} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x+1}$$

Solution. En mettant au même dénominateur, on cherche a et b tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;1\}$, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{a(x+1)+b(x-1)}{x^2-1} = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2-1}$$

Par identification des coefficients, on a donc

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ a-b & = & 1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \frac{1}{2} \\ b & = & -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ains, pour tout réel x différent de 1 et -1, on a

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$$

III. Racines d'un polynôme

1) Définition

Définition 3. — Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et a un élement de $\mathbb{K}$. On dit que a est une **racine** de P si $\mathrm{P}(a) = 0$.

Remarque 5. — Chercher les racines de P, c'est donc résoudre l'équation $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = 0$

Exemple 5. — 1 est une racine du polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 1$. En effet, $\mathrm{P}(1) = 0$.

Définition 4. — Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a un réel. On dit que le polynôme P se **factorise** par $X - a$ (ou que $X - a$ **divise** P) s'il existe un polynôme $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Exemple 6. — Le polynôme $P(X) = X^3 - X^2 + X - 1$ se factorise par $X - 1$. En effet, on a $P(X) = (X - 1)(X^2 + 1)$.

Théorème 8.2.

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et a un réel. Alors

a est une racine de P si et seulement s'il existe un polynôme $Q(X)$ tel que $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Dans ce cas, on a alors $\deg(P) = \deg(X - a) + \deg(Q)$ c'est-à-dire $\deg(Q) = \deg(P) - 1$.

Exemple 7. — Soit P le polynôme défini par $P(X) = X^3 - 2X + 1$. Montrer que 1 est racine, puis factoriser P par $(X - 1)$.

Solution. On constate que $P(1) = 0$. Ainsi, 1 est racine. Par théorème, on peut donc factoriser P par $X - 1$: il existe Q un polynôme tel que $P(X) = (X - 1)Q(X)$ avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1 = 2$. On cherche donc a, b et c tel que

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(aX^2 + bX + c)$$

Après développement, on obtient

$$X^3 - 2X + 1 = aX^3 + (b - a)X^2 + (c - b)X - c$$

Par identification, on obtient $a = 1,\ b = 1$ et $c = -1$. Ainsi

$$X^3 - 2X + 1 = (X - 1)(X^2 + X - 1)$$

Définition 5 (Multiplicité d'une racine). — On dit qu'une racine a d'un polynôme P est de **multiplicité** $k \in \mathbb{N}^*$ si $P(a) = P'(a) = \cdots = P^{(k-1)}(a) = 0$ et $P^{(k)}(a) \neq 0$. Une racine de multiplicité 1 est dite simple, de multiplicité 2 est dite double.

Exemple 8. — Montrer que 2 est racine double du polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 4$.

Solution. En effet, on a $P(2) = 0$, et puisque $P'(X) = 3X^2 - 6X$, on a également $P'(2) = 0$. Enfin, $P^{(2)}(X) = 6X - 6$ et $P^{(2)}(2) \neq 0$. 2 est donc bien une racine double de P.

Théorème 8.3.

a est une racine de multiplicité $k \in \mathbb{N}^*$ d'un polynôme P de degré n si et seulement s'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X - a)^k Q(X)$, avec $Q(a) \neq 0$.

Remarque 6. — Ainsi, si la racine est double, on peut mettre $(X - a)^2$ en facteur.

2) Nombre de racines d'un polynôme

Dans $\mathbb{C}$, on dispose d'un théorème fondamental en analyse :

Théorème 8.4. Théorème de d'Alembert-Gauss

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

Démonstration. Théorème admis. □

Conséquence 1. — Ainsi, tout polynôme de degré n ($n \geqslant 1$) admet exactement n racines complexes, éventuellement non distinctes. Si P est de degré n, et de coefficient dominant a_n, il existe p racines $\alpha_1, \cdots, \alpha_p$ de multiplicités respectives $m_1, \cdots, m_p$, tels que

$$P(X) = a_n \prod_{i=1}^{p} (X - \alpha_i)^{m_i} \quad \text{avec} \quad m_1 + \cdots + m_p = n$$

Conséquence 2. — Soit $P \in \mathbb{C}_n[X]$. Si P a $n+1$ racines, alors P est le polynôme nul.

Démonstration. En effet, P est au plus de degré n. Il ne peut pas admettre plus de n racines, sauf s'il est nul. □

Définition 6. — Un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ est dit irréductible si et seulement si $P = AB \implies$ A ou B constant. Ainsi, on ne peut pas les factoriser.

Remarque 7. — Dans $\mathbb{C}[X]$, seuls les polynômes constants et de degré 1 sont irréductibles.

3) Cas des polynômes de degré 2 sur $\mathbb{R}[X]$

Théorème 8.5.

Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 ($a \neq 0$). Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

- Si $\Delta > 0$, le polynôme P possède deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X - x_1)(X - x_2)$.
- Si $\Delta = 0$, le polynôme P possède une unique racine réelle dite double

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

  On a alors $P(X) = a(X - x_0)^2$.
- Si $\Delta < 0$, le polynôme P ne possède pas de racines réelles, et ne se factorise donc pas dans $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 9. — Factoriser $P(X) = 2X^2 + 2X - 4$

Solution. On a $\Delta = 36 > 0$ donc le polynôme P possède deux racines réelles

$$x_1 = \frac{-2-\sqrt{36}}{2\times 2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = 1$$

Donc $\mathrm{P(X)} = 2(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+2)$.

Remarque 8. — Attention : on n'oubliera pas, lors de la factorisation, de mettre en facteur le coefficient de plus haut degré (dans l'exemple précédent, le 2).

Remarque 9. — Ainsi, dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, les polynômes de degré 2, dont le discriminant est strictement négatif, sont irréductibles. On dispose alors du résultat suivant :

Proposition 8.6.

Tout polynôme non nul de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ est le produit de son coefficient dominant a_n, de polynômes unitaires de degré 1, et de polynômes unitaires de degré 2 à discriminant strictement négatif.

4) Cas général

Méthode 8.1.

Lorsqu'on doit factoriser un polynôme P (ou déterminer ses racines) :

- On cherche des racines évidentes $(-2,-1,0,1,2)$ pour se ramener à un (ou des) polynôme(s) de degré 2.
- On factorise le polynôme P par $\mathrm{X}-a$ où a désigne une racine évidente.
- Une fois ramené à un (ou des) polynômes de degré 2, on utilise la méthode classique du discriminant.

Exemple 10. — Soit $\mathrm{P(X)} = \mathrm{X}^3 - 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} + 2$. Déterminer les racines de P.

Solution.

- Premier étape : on cherche une “racine évidente” : $-2,-1,0,1,2$. Ici, on constate que $\mathrm{P}(1) = 1-2-1+2 = 0$ donc 1 est racine évidente.
- Deuxième étape : on factorise P par $\mathrm{X}-1$: on écrit $\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X}-1)\mathrm{Q(X)}$ avec $\deg(\mathrm{Q}) = \deg(\mathrm{P})-1 = 2$. Donc Q peut s'écrire $a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c$.
  On a alors
  $$\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X}-1)(a\mathrm{X}^2 + b\mathrm{X} + c) = a\mathrm{X}^3 + (b-a)\mathrm{X}^2 + (c-b)\mathrm{X} - c$$
  Par unicité de l'écriture d'un polynôme, on identifie les coefficients :
  $$\left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b-a &=& -2 \\ c-b &=& -1 \\ -c &=& 2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a &=& 1 \\ b &=& -1 \\ c &=& -2 \end{array}\right.$$
  Donc $\mathrm{P(X)} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2)$.
- Troisième étape : on détermine les racines du polynôme Q. Ici, Q est du second degré, dont le

discriminant vaut $\Delta = 9$. Donc Q possède deux racines :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{9}}{2} = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = 2$$

Donc $Q(X) = (X-2)(X+1)$

- Quatrième étape : on conclut. On a donc

$$P(X) = (X-1)(X-2)(X+1)$$

et P possède trois racines réelles : $1, 2$ et -1.

Exercice 2. — Factoriser $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ sur $\mathbb{C}[X]$.

Solution. Remarquons que $P(1) = 0$ et $P(-2) = 0$. On peut donc factoriser par $(X-1)(X+2)$. Après factorisation, on obtient

$$P(X) = (X-1)(X+2)(X^2+1)$$

et donc

$$P(X) = (X-1)(X+2)(X-i)(X+i)$$

Remarque 10. — Dans $\mathbb{R}[X]$, $X^4 + X^3 - X^2 + X - 2$ se factorise en $(X-1)(X+2)(X^2+1)$ car X^2+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

5) Division euclidienne

Remarque 11. — Pour factoriser, plutôt que de procéder par identification, on peut également utiliser la division euclidienne.

Proposition 8.7.

Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec B non nul. Alors, il existe deux polynômes uniques Q et R, avec $\deg R < \deg B$, tels que $A = BQ + R$. Le polynôme Q est le quotient, et R est le reste de la division euclidienne de A par B.

Remarque 12. — En pratique, on pose la division et on effectue la division comme pour la division entière.

Exemple 11. — Effectuer la division euclidienne de $X^3 - 2X^2 - X + 2$ par $X - 1$.

$$\begin{array}{rrrr|l}
X^3 & -2X^2 & -X & +2 & X \; -1 \\ \cline{5-5}
-X^3 & +X^2 & & & X^2 \; -X \; -2 \\ \cline{1-2}
 & -1X^2 & -X & & \\
 & X^2 & -X & & \\ \cline{2-3}
 & & -2X & +2 & \\
 & & 2X & -2 & \\ \cline{3-4}
 & & & 0 &
\end{array}$$

Exercice 3. — Effectuer la division euclidienne de $2X^4 - X^3 + 3X - 5$ par $X^2 - X + 2$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$.

Solution. Par division euclidienne, on obtient

$$2X^4 - X^3 + 3X - 5 = (X^2 - X + 2)(2X^2 + X - 3) + (-2X + 1)$$

Notons Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de $(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2$ par $(X-2)(X-3)$. $\deg(R) < \deg((X-2)(X-3)) = 2$ et donc R s'écrit $aX + b$ avec a et b deux réels. On a donc

$$(X-3)^{2n} - (X-2)^n - 2 = (X-2)(X-3)Q(X) + aX + b$$

En prenant $X = 2$, on obtient $2a + b = (-1)^{2n} - 2 = -1$ et en prenant $X = 3$, on obtient $3a + b = -(1)^n - 2 = -3$. Ainsi, $a = -2$ et $b = 3$ et le reste s'écrit donc $-2X + 3$.

6) Relations racines-coefficients

Proposition 8.8.

Soient $P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n, avec $n \geqslant 1$ et $a_n \neq 0$, et $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ ses racines complexes (éventuellement non distinctes). Alors

$$\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n} \quad \text{et} \quad \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}$$

Démonstration. En effet, par factorisation, on obtient

$$P(X) = a_n X^n + \cdots + a_0 = a_n (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_n)$$

En développant, on obtient

$$P(X) = a_n X^n + a_n(-\alpha_1 - \cdots - \alpha_n) X^{n-1} + \cdots + a_n (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

On conclut par identification des coefficients. □

Conséquence 3. — Pour un polynôme de degré 2, $P(X) = aX^2 + bX + c$ ($a \neq 0$), en notant z_1 et z_2 ses racines complexes, on a alors

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

IV. Fractions rationnelles

1) Définitions

Définition 7. — Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Le quotient $\frac{A}{B}$ est appelé **fraction rationnelle** à coefficient dans $\mathbb{K}$.
A est le numérateur de la fraction, et B le dénominateur.

Exemple 12. — Par exemple, $\dfrac{X^2+1}{X-2}$ est une fraction rationnelle.

Notation 3. — On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Proposition 8.9.

On munit $\mathbb{K}(X)$ de différentes relations :

- $\dfrac{A}{B} = \dfrac{C}{D}$ si et seulement si $AD = BC$.
- $\dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} = \dfrac{AD+BC}{BD}$ et $\dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} = \dfrac{AC}{BD}$.

Remarque 13. — On remarque qu'il n'y a pas unicité de l'écriture d'une fraction rationnelle. Par exemple,

$$\frac{X^2+X^3}{X^2+X} = \frac{X+X^2}{X+1}$$

puisque $(X^2+X^3)(X+1) = (X^2+X)(X+X^2)$. On dit que ce sont des **représentants** de la même fraction rationnelle.
On dit alors qu'une fraction est **irréductible** si numérateur et dénominateur n'ont pas de facteurs irréductibles unitaires communs. Il existe alors un seul représentant irréductible d'une fraction rationnelle avec un dénominateur unitaire.

Méthode 8.2.

Pour déterminer un représentant irréductible d'une fraction rationnelle, on factorise numérateur et dénominateur et on simplifie les éventuels facteurs communs.

Exemple 13. — Mettre $\dfrac{X^2-1}{X^3-6X+5}$ sous forme irréductible.

Solution. En cherchant les racines, on obtient

$$X^2-1 = (X-1)(X+1) \quad \text{et} \quad X^3-6X+5 = (X-1)(X^2+X-5)$$

Ainsi,

$$\frac{X^2-1}{X^3-6X+5} = \frac{X+1}{X^2+X-5}$$

et la fraction est irréductible, puisque -1 n'est pas racine de X^2+X-5.

2) Degré et partie entière d'une fraction

On définit le degré d'une fraction rationnelle par analogie :

Définition 8. — Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$. Alors, on pose

$$\deg\left(\frac{A}{B}\right) = \deg A - \deg B$$

avec la convention $\deg(0) = -\infty$.

Remarque 14. — Ainsi, le degré d'une fraction rationnelle ne dépend pas de son représentant.

Propriété 2. — *Soient* F *et* G *deux fractions rationnelles de* $\mathbb{K}(X)$, *et* $k \in \mathbb{K}^*$.

① $\deg F \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

② $\deg \frac{1}{F} = -\deg(F)$.

③ $\deg(F+G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$.

④ $\deg FG = \deg F + \deg G$.

⑤ $\deg(kF) = \deg(F)$.

Exemple 14. — Ainsi, la fraction rationnelle $F(X) = \frac{X+1}{X^2+1}$ est de degré $\deg F = 1 - 2 = -1$.

Proposition 8.10. Partie entière

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ et une unique fraction rationnelle $G \in \mathbb{K}(X)$, tel que $F = P + G$, avec $\deg(G) < 0$. Le polynôme P est appelé **partie entière** de F.

Méthode 8.3.

Pour déterminer la partie entière de $F = \frac{A}{B}$ (avec A, B des polynômes), on détermine la division euclidienne de A par B. En notant Q le quotient, et R le reste, on a alors

$$A = BQ + R \Leftrightarrow \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$$

avec $\deg\left(\frac{R}{B}\right) < 0$. Q représente donc la partie entière de F.

Exemple 15. — Déterminer la partie entière de $\dfrac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1}$.

Solution. Par division euclidienne, on obtient

$$X^3 - X^2 + 1 = (X^2 + 1)(X - 1) - X + 2$$

avec $\deg(-X+2) < \deg(X^2+1)$. On a alors

$$\frac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1} = X - 1 + \frac{-X+2}{X^2+1}$$

et donc $X - 1$ est la partie entière de $\dfrac{X^3 - X^2 + 1}{X^2 + 1}$.

3) Pôles et décomposition en éléments simples

Définition 9. — Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle. On appelle :

- **zéros** de F les racines du numérateur d'un représentant irréductible de F.
- **pôles** de F les racines du dénominateur d'un représentant irréductible de F.
- **multiplicité** d'un pôle la multiplicité de la racine correspondante du dénominateur d'un représentant irréductible de F.

Exemple 16. — Pour $F(X) = \dfrac{X^2-1}{X+2}$, 1 et -1 sont les racines de F, et -2 est un pôle simple de F.

Proposition 8.11. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$

Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ une fraction rationnelle. En prenant un représentant irréductible de F, on l'écrit sous la forme factorisée

$$F(X) = \frac{P(X)}{k\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{\alpha_i}}$$

où les a_i sont des nombres complexes, et les α_i des entiers naturels non nuls. Alors, il existe un unique polynôme E, et des uniques nombres complexes $c_{i,j}$, vérifiant

$$F(X) = E(X) + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{\alpha_i}\frac{c_{i,j}}{(X-a_i)^j}\right)$$

Cette décomposition est appelée **décomposition en éléments simples** dans $\mathbb{C}$ de F.

Méthode 8.4.

Pour déterminer la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}$, on écrit l'allure de la décomposition, puis on détermine les nombres complexes $c_{i,j}$ en utilisant différentes méthodes :

- On peut multiplier par $(X-a_i)^{\alpha_i}$ puis prendre $X = a_i$ pour déterminer les coefficients d'ordre le plus élevé.
- On peut utiliser les propriétés du polynôme (parité, imparité) pour déterminer certains coefficients.
- Enfin, on peut soit prendre des valeurs particulières (et résoudre un système), soit multiplier par X^k et prendre la limite en $+\infty$ pour déterminer certaines valeurs restantes.

Exemple 17. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X+1}{(X-i)X(X+2)^2}$$

Solution. Il existe quatre complexes a, b, c et d tels que

$$\frac{X+1}{(X-i)X(X+2)^2} = \frac{a}{X-i} + \frac{b}{X} + \frac{c}{X+2} + \frac{d}{(X+2)^2}$$

En multipliant par $X-i$ et prenant $X = i$, on obtient

$$a = \frac{i+1}{i(i+2)^2} = \frac{1-7i}{25}$$

De même pour b et d (en multipliant respectivement par X et $(X+2)^2$), on obtient

$$b = \frac{1}{4}i \quad \text{et} \quad d = \frac{-2+i}{10}$$

Pour obtenir c, on peut multiplier par X et faire tendre X vers $+\infty$. On obtient alors $0 = a+b+c$, soit $c = -a-b = \frac{1}{25} + \frac{3}{100}i$.

Proposition 8.12. Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}$

Dans le cas réel, il faut se souvenir que les polynômes irréductibles ne sont pas uniquement de la forme $(X-a_i)$ mais peuvent être des polynômes de degré 2 à discriminant strictement négatif. Les décompositions s'écriront alors sous la forme $\frac{a}{(X-a_i)^p}$ avec $a \in \mathbb{R}$, ou $\frac{aX+b}{(aX^2+bX+c)^p}$ dans le cas d'un trinôme à discriminant strictement négatif.

Exemple 18. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X+1}{(X-2)(X^2+X+1)}$$

Solution. Le trinôme X^2+X+1 est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (car à discriminant strictement négatif). Ainsi, il existe trois réels a, b et c tels que

$$F(X) = \frac{a}{X-2} + \frac{bX+c}{X^2+X+1}$$

Par la méthode classique, on obtient $a = \frac{3}{7}$. Calculons alors $F(X) - \frac{3/7}{X-2}$:

$$\frac{X+1-3/7(X^2+X+1)}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{-3/7X^2+4/7X+4/7}{(X-2)(X^2+X+1)}$$

soit

$$\frac{X+1-3/7(X^2+X+1)}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{1}{7}\frac{-3X^2+4X+4}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{1}{7}\frac{(X-2)(-3X-2)}{(X-2)(X^2+X+1)} = \frac{1}{7}\frac{-3X-2}{X^2+X+1}$$

Ainsi, $b = -\frac{3}{7}$ et $c = -\frac{2}{7}$.

Exercices

Exercice 4. — Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 0, P'(1) = 1$ et $P''(1) = 4$.

Exercice 5. — Déterminer l'ensemble des polynômes P à coefficients réels et de degré 2 tels que $P(1) = 1$ et $P'(1) = 0$.

Exercice 6. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$F(X) = \frac{X^2+1}{X-1}$$

Exercice 7. — Soit P le polynôme définie par $P(X) = (X-1)^4$. Calculer $P^{(k)}(1)$ pour tout entier $k > 0$. Généraliser dans le cas où $P(X) = (X-a)^n$ $(a \in \mathbb{R}, n > 0)$.

Exercice 8. — Pour tout réel x, soit $P(x) = 3x^3 - x - 2$.

1. Factoriser P.
2. En déduire le signe de P sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. — Soit $P(X) = X^3 - 2X^2 - 5X + 6$.

1. Vérifier que $X+2$ divise P.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que $P(X) = (X+2)(aX^2 + bX + c)$.
3. En déduire l'ensemble des racines de P.
4. Résoudre l'équation $e^{2x} - 2e^{x} + 6e^{-x} - 5 = 0$.

Exercice 10 (Tout seul)**.** — Factoriser, déterminer l'ensemble des racines, puis le signe des deux polynômes suivants :

$$P(X) = 2X^3 + X^2 - 23X + 20 \qquad Q(X) = X^3 - 13X - 12$$

Exercice 11 (Sur la somme et le produit des racines)**.** — Soit $P(X) = ax^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2 $(a \neq 0)$ et possédant deux racines réelles, qu'on note α et β.

1. Factoriser P en fonction de α et β. En développant l'expression obtenue, exprimer $\alpha + \beta$ et $\alpha\beta$ en fonction de a, b et c.
2. Réciproquement, soient p et q deux nombres réels distincts. On pose $S = p + q$ et $P = pq$. Montrer que p et q sont les racines du polynômes $X^2 - SX + P$. Que se passe-t-il si $p = q$?
3. Déterminer l'âge de Boule et Bill, sachant que Bill est le plus âgé, que la somme de leurs âges est égale à 28, et que le produit de leurs âges est égal à 192. (On pourra utiliser le fait que $784 = 28^2$).

Exercice 12. — Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle

$$\frac{1}{X(X+1)(X+2)}$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

Exercice 13. — Donner une condition nécessaire et suffisante sur λ et μ pour que X^2+2 divise $X^4+X^3+\lambda X^2+\mu X+2$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 14. — Calculer

$$\int_0^1 \frac{x-x^2}{x^3+x^2+x+1}\,dx$$

Exercice 15. — Développer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle

$$F(X)=\frac{X-1}{X(X^2+1)^2}$$

Exercice 16 (*)**.** — Montrer qu'il n'existe pas de fraction rationnelle $F\in\mathbb{C}(X)$ vérifiant $F^2=X$.