CHAPITRE 9

# MATRICES

**Résumé**

*Dans ce chapitre, on introduit un objet très important, qui sera utilisé régulièrement et qui fera l'objet d'étude approfondie plus tard dans l'année.*

## Objectifs

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.*

① Savoir calculer avec les matrices (sommes, produits, transposés) . . . . . . . . . . □

② Connaître définition et propriétés des matrices inversibles . . . . . . . . . . □

③ Savoir déterminer le rang d'une matrice . . . . . . . . . . □

④ Savoir faire le lien entre système et matrice associée . . . . . . . . . . □

⑤ Savoir déterminer la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice...

- par récurrence, en conjecturant l'allure générale . . . . . . . . . . □
- par la formule du binôme de Newton . . . . . . . . . . □
- par diagonalisation, lorsque celle-ci est donnée . . . . . . . . . . □

# I. Matrices

## 1) Définition

**Définition 1.** — Soient $n$ et $p$ deux entiers non nuls, et $\mathbb{K}$ représentant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On appelle **matrice** à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ un tableau rectangulaire de nombres dans $\mathbb{K}$ comportant $n$ lignes et $p$ colonnes.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}}_{p \text{ colonnes}} \quad \left.\vphantom{\begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}}\right\} n \text{ lignes}$$

En général, lorsque A est une matrice à $n$ lignes et $p$ colonnes, le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne se note $a_{i,j}$. On écrit alors

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \text{ ou } \mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

**Notation 1.** — L'ensemble des matrices à $n$ lignes et $p$ colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

**Définition 2.** —

- On appelle **matrice ligne** $\begin{pmatrix} . & . & . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$.
- On appelle **matrice colonne** $\begin{pmatrix} . \\ . \\ . \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
- On appelle **matrice nulle** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $0_{n,p}$ (ou 0 quand il n'y a pas d'ambiguïté), la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

## 2) L'algèbre des matrices

### a) Addition de matrices

**Définition 3.** — Soient $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $\mathrm{B} = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **somme** de la matrice A et de la matrice B la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée A + B définie par

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1, n]\!],\ \forall\, j \in [\![1, p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

**Exemple 1.** — Si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{A} + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

### b) Multiplication par un scalaire

**Définition 4.** — Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On appelle **produit** de la matrice A par le nombre $\lambda$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $\lambda A$, définie par

$$\lambda A = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ où } \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \forall\ j \in [\![1,p]\!],\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

**Exemple 2.** — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ alors $2A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

### c) Premières propriétés

**Propriété 1.** — *Soient* A, B *et* C *trois éléments de* $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, *et* $\lambda, \mu$ *deux nombres de* $\mathbb{K}$.

- $A + B = B + A$ *(commutativité de l'addition).*
- $0 + A = A + 0 = A$ *(0 est le neutre de l'addition)*
- $A + (-A) = (-A) + A = A - A = 0$ *($-A$ est l'opposé de la matrice A.)*
- $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ *et* $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A = \lambda\mu A$ *(distributivités)*

**Remarque 1.** — Les différentes propriétés précédentes font de l'ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, muni de l'addition et la multiplication par un réel, un **espace vectoriel**. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.

**Remarque 2.** — On peut manipuler, pour ces opérations, ainsi les matrices comme les nombres réels ou complexes. Par exemple, l'équation $X + A = B$ d'inconnue la matrice X, admet comme unique solution $X = B - A$. De même, l'équation $2X = A$ d'inconnue la matrice X admet comme unique solution $X = \frac{1}{2}A$.

### d) Produit matriciel

**Définition 5.** — Soient $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice $\mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. On appelle **produit** de la matrice A par la matrice B la matrice de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, notée $A \times B$ ou AB, définie par

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant m}} \text{ où } \forall\ i \in [\![1,n]\!],\ \forall\ j \in [\![1,m]\!],\ c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,p}b_{p,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \end{array}$$

**Remarque 3.** —

- ⚠ Pour multiplier deux matrices, il faut qu'elles soient compatibles : lorsque l'on calcule AB il faut que le nombre de colonnes de A soit égal au nombre de lignes de B.
- ⚠ La multiplication des matrices n'est pas **commutative** : en général, $AB \neq BA$. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

- ⚠ Contrairement à ce qui se passe dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on peut avoir $AB = 0$ sans pour autant que A et B soient nuls. Par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On dit que $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ n'est pas **intègre**.

**Exemple 3.** — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } BA = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Propriété 2.** — *Soient* $A, B, C$ *trois matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées), et* $\lambda$ *un élément de* $\mathbb{K}$.

- $A(BC) = (AB)C = ABC$ *(associativité de la multiplication)*
- $(\lambda A)B = A(\lambda B) = \lambda AB$
- $(A+B)C = AC + BC$ *et* $C(A+B) = CA + CB$ *(distributivités)*

### e) Transposition

**Définition 6.** — Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de la matrice A la matrice de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, notée ${}^tA$ , définie par

$${}^tA = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p \\ 1\leqslant j\leqslant n}} \text{ où } \forall\, i \in [\![1,p]\!],\ \forall\, j \in [\![1,n]\!],\ c_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, la matrice ${}^tA$ est la matrice obtenue à partir de A par symétrie, en échangeant les lignes et les colonnes.

**Exemple 4.** — Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$, alors ${}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

**Propriété 3.** — *Soient* A *et* B *deux matrices (que l'on considère compatibles pour les multiplications envisagées) et* $\lambda$ *un élément de* $\mathbb{K}$.

- ${}^t(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = {}^t\mathrm{A} + {}^t\mathrm{B}$ *et* ${}^t(\lambda \mathrm{A}) = \lambda\, {}^t\mathrm{A}$.
- ${}^t({}^t\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ *et* ${}^t(\mathrm{AB}) = {}^t\mathrm{B}\, {}^t\mathrm{A}$.

# II. Matrices carrées

## 1) Définitions

### a) Matrices carrées

**Définition 7.** — Une **matrice carrée** d'ordre $n$ est une matrice à $n$ lignes et à $n$ colonnes. On notera $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre $n$, plutôt que $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. De même, on notera $0_n$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**Exemple 5.** — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ est une matrice carrée d'ordre 2.

**Définition 8.** — Si $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, on appelle **diagonale** de A les coefficients $(a_{i,i})_{1\leqslant i\leqslant n}$.

**Exemple 6.** — Dans l'exemple précédent, la diagonale est $(1,-3)$.

### b) Matrices diagonales et triangulaires

**Définition 9.** —

- Une **matrice diagonale** d'ordre $n$ est une matrice carrée d'ordre $n$ où tous les coefficients sont nuls sauf éventuellement ceux de la diagonale :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- La **matrice identité** de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notée $\mathrm{I}_n$, est la matrice diagonale avec des 1 sur la diagonale :

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire supérieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\ i \in [\![1,n]\!], \forall\ j \in [\![1,n]\!], i > j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

- Une **matrice triangulaire inférieure** $(a_{i,j})$ est une matrice telle que

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!], \forall\, j \in [\![1,n]\!], i < j \implies a_{i,j} = 0$$

Ainsi, elle est de la forme

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & a_{3,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

**Remarque 4.** — La matrice identité $I_n$ est **neutre** pour la multiplication : quelle que soit la matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AI_n = I_nA = A$.

### c) Matrices symétriques et antisymétriques

**Définition 10.** — Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ une matrice carrée.

- A est dite **symétrique** si

$$\forall\, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{i,j} = a_{j,i}$$

Ainsi, une matrice est symétrique si et seulement si ${}^t A = A$.

- A est dite **antisymétrique** si ${}^t A = -A$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre $n$ symétriques, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices d'ordre $n$ antisymétiques.

**Exemple 7.** — La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est symétrique.

## 2) Puissances d'une matrice carrée

Si A et B sont deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on peut alors calculer AB et BA (elles sont compatibles) et le produit est encore dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On peut alors définir la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice.

**Définition 11.** — Soit A une matrice carrée d'ordre $n$. Soit $k$ un entier. On définit $A^k$ de la manière suivante :

- Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.

- Si $k > 0$, $\mathrm{A}^k = \underbrace{\mathrm{A} \times \mathrm{A} \times \cdots \times \mathrm{A}}_{k \text{ fois}}$.

**Propriété 4.** — *Par définition, pour tout matrice* $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, *et pour tous entiers* $p$ *et* $q$, $\mathrm{A}^p \times \mathrm{A}^q = \mathrm{A}^{p+q}$.

**Remarque 5.** — Si A et B sont deux matrices carrées d'ordre $n$ diagonales, alors le produit AB est facile à calculer; en effet, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & b_{n,n} \end{pmatrix}$, alors

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \times b_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \times b_{n,n} \end{pmatrix}$$

Ainsi, si A est une matrice diagonale $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$, alors pour tout entier $p$, on a

$$\mathrm{A}^p = \begin{pmatrix} a_{1,1}^p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{n,n}^p \end{pmatrix}$$

**Remarque 6.** — ⚠ Puisque la multiplication des matrices n'est pas commutative, on n'a pas $(\mathrm{AB})^k = \mathrm{A}^k\mathrm{B}^k$. En effet, $(\mathrm{AB})^k = (\mathrm{AB})(\mathrm{AB})\cdots(\mathrm{AB})$ et il faut que $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ pour pouvoir obtenir $\mathrm{A}^k\mathrm{B}^k$.

**Définition 12.** — Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B **commutent** si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$.

**Exemple 8.** — La matrice $\mathrm{I}_n$ commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. En effet, $\mathrm{AI}_n = \mathrm{I}_n\mathrm{A} = \mathrm{A}$.

**Théorème 9.1. Formule du binôme de Newton**

Soient deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent. Alors, pour tout entier $n$, on a

$$(\mathrm{A}+\mathrm{B})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathrm{A}^k \mathrm{B}^{n-k}$$

**Méthode 9.1.**

Pour calculer $\mathrm{A}^p$, on peut parfois utiliser la formule du binôme de Newton, en décomposant A sous la forme $\mathrm{I}_n + \mathrm{B}$ avec B une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

**Exemple 9.** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour tout entier $n$.

*Solution.* On constate que $A = I_3 + B$ avec

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $B^2 = 0$. Puisque $I_3$ et B commutent (*car* $I_3$ *commute avec toutes les matrices*), on en déduit que, pour tout entier $n \geqslant 2$

$$A^n = (I_3 + B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 + \binom{n}{1} B^1 + \underbrace{\binom{n}{2} B^2 + \cdots + \binom{n}{n} B^n}_{=0}$$

Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 2$,

$$A^n = I_3 + nB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

résultat qui est également vrai pour $n = 0$ et $n = 1$.

**Méthode 9.2.**

Pour calculer $A^p$, on peut également essayer de calculer les premières puissances, puis en déduire le résultat par récurrence sur $p$.

**Exemple 10.** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^n$ pour tout entier $n$.

*Solution.* On constate que

$$A^0 = I_2 \quad A^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soit alors $P_n$ la proposition définie pour tout entier $n$ par

$$P_n : A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

que l'on démontre par récurrence sur $n$ :

- Initialisation : puisque $A^0 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $P_0$ est vraie.
- Hérédité : supposons que la proposition $P_n$ est vraie pour un certain entier $n$ fixé. Montrons alors $P_{n+1}$ :

$$A^{n+1} = A^n \times A \underbrace{=}_{\text{par H.R.}} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La proposition $P_{n+1}$ est donc vraie.

On a ainsi démontré par récurrence que

$$\forall\, n \geqslant 0,\ \ A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# III. Matrices inversibles

## 1) Définition

**Définition 13.** — Soit A une matrice carrée d'ordre $n$. On dit que A est **inversible** s'il existe une matrice B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, B est appelée **matrice inverse** de A, et est notée $B = A^{-1}$.

**Notation 2.** — On note $GL_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrée d'ordre $n$ inversibles à coefficients dans $\mathbb{K}$.

**Exemple 11.** — La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ est inversible. En effet,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = I_2$$

**Remarque 7.** — La matrice $I_n$ est inversible et $I_n^{-1} = I_n$. En effet, $I_nI_n = I_nI_n = I_n$.

## 2) Propriétés

**Propriété 5.** — *Soient* A *et* B *deux matrices carrées de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- *Si* $A \in GL_n(\mathbb{K})$, *alors* $A^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$ *et* $(A^{-1})^{-1} = A$.
- *Si* A *et* B *sont inversibles, alors* AB *est également inversible, et on a* $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

*Démonstration.* Pour le premier point, on a en effet $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ donc $A^{-1}$ est inversible et son inverse est A.

Pour le second point, on a $AB(B^{-1}A^{-1}) = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$ et $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$. Donc AB est inversible et son inverse est $B^{-1}A^{-1}$. □

Pour démontrer qu'une matrice n'est pas inversible, on peut utiliser le théorème suivant :

**Théorème 9.2.**

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice non nulle. S'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ non nulle telle que $AB = 0_n$ alors A n'est pas inversible.

*Démonstration.* Faisons un raisonnement par l'absurde, et supposons que A soit inversible, d'inverse $A^{-1}$. Alors

$$AB = 0_n \Rightarrow A^{-1}(AB) = O_n \Rightarrow B = 0_n$$

ce qui est absurde, puisque B n'est pas nulle. □

**Remarque 8.** — Si A et B sont toutes les deux non nulles, telles que $AB = 0_n$ alors ni A ni B ne sont inversibles.

### 3) Règles de calcul

**Propriété 6.** — *Soient* A *et* B *deux matrices de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, *et* $C \in GL_n(\mathbb{K})$. *Alors*

$$AC = B \Leftrightarrow A = BC^{-1} \qquad CA = B \Leftrightarrow A = C^{-1}B$$

$$AC = BC \Leftrightarrow A = B \qquad CA = CB \Leftrightarrow A = B$$

**Remarque 9.** — ⚠ Cela n'est valable que si C est inversible! Ce n'est pas forcément vrai si C n'est pas inversible. Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, et $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a $AC = BC$ et pourtant $A \neq B$.

**Théorème 9.3.**

- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.
- Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$. S'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $BA = I_n$, alors A est inversible, d'inverse B.

Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier $AB = I_n$ ET $BA = I_n$. Seul un des sens est nécessaire.

**Méthode 9.3.**

Pour montrer qu'une matrice A est inversible, on peut chercher une matrice B telle que $AB = I_n$. On pourra conclure que A est inversible, et que $A^{-1} = B$.

**Exemple 12.** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On note également $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A(I_2 + B)$.
2. En déduire que A est inversible, et calculer $A^{-1}$.

*Solution.*

1. On constate que

$$A(I_2 + B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

2. D'après ce qui précède, A est inversible, et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{I}_2 + \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

### 4) Ensemble $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$

**Théorème 9.4.**

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. On a alors

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Le réel $ad - bc$ est appelé **déterminant** de la matrice A et est noté det(A).

*Démonstration.* Notons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. On suppose que $\mathrm{A} \neq 0$ et donc $\mathrm{B} \neq 0$. Alors

$$\mathrm{AB} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = (ad-bc)\mathrm{I}_2$$

- Si $ad - bc = 0$, alors $\mathrm{AB} = 0_2$. Puisque $\mathrm{B} \neq 0$, d'après un résultat précédent, A ne peut pas être inversible.
- Si $ad - bc \neq 0$, alors $\mathrm{A} \times \left(\frac{1}{ad-bc}\mathrm{B}\right) = \mathrm{I}_2$. D'après un résultat précédent, A est donc inversible, et

$$\mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\mathrm{B} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

□

**Remarque 10.** — Nous verrons plus tard dans l'année la notion de déterminant de manière plus générale.

## IV. Systèmes linéaires et matrices

### 1) Ecriture matricielle d'un système linéaire

**Exemple 13.** — On s'intéresse au système

$$(\mathrm{S})\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 2x & - & 3y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & - & 2z & = & 2 \\ -x & - & 2y & + & z & = & -1 \end{array}\right.$$

Notons alors $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a alors

$$(\mathrm{S}) \Leftrightarrow \mathrm{AX} = \mathrm{Y}$$

La matrice A est appelée **matrice associée** au système (S). Résoudre le système (S), c'est donc trouver le vecteur colonne X.

**Définition 14.** — Soit (S) un système $n \times p$ de la forme

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}x_2 & + & \cdots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{cases}$$

On appelle **matrice associée** à (S) la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix}$$

Le système (S) s'écrit alors AX = Y, avec $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{Y} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

## 2) Inverse d'une matrice et système

**Théorème 9.5.**

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $\mathrm{B} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ une matrice colonne. Le système (S) AX = B admet une unique solution si, et seulement si, la matrice A est inversible.
Dans ce cas, $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$.

**Remarque 11.** — Ainsi, pour résoudre un système (S), on peut introduire la matrice associée et résoudre une équation matricielle AX = B. Cela permet en général de simplifier les notations.

**Conséquence 1.** — Une matrice triangulaire supérieure A est inversible si et seulement si tous les termes de la diagonale sont non nuls.

*Démonstration.* En effet, un système triangulaire est de Cramer si et seulement si tous ses pivots sont non nuls. □

**Méthode 9.4.**

Pour montrer qu'une matrice A est, ou n'est pas inversible, sans calculer son inverse, on résout matriciellement l'équation AX = 0 en appliquant la méthode du pivot de Gauss. Si on obtient une diagonale sans terme nul, la matrice sera inversible. On peut simplifier les écritures en écrivant (A|0) pour ne pas s'encombrer des inconnues.

**Exemple 14.** — Montrer que la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

n'est pas inversible. Montrer que la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est inversible.

*Solution.* On résout :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{ligne pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \phantom{x} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \phantom{x} \\ \text{ligne pivot} \\ L_3 \leftarrow 3L_3 + L_2 \end{array}$$

Puisqu'un des termes sur la diagonale est nul, la matrice n'est pas inversible.
Pour A :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & -10 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Les termes sur la diagonale étant non nuls, la matrice A est bien inversible.

**Méthode 9.5.**

Pour déterminer l'inverse d'une matrice, on peut utiliser la méthode du pivot de Gauss, mais en simplifiant les écritures. On écrit $(M|I_n)$ et on cherche à remplacer, par des opérations sur les lignes, M par $I_n$. A la place du $I_n$ de départ, on aura alors $M^{-1}$.

**Exemple 15.** — Déterminer l'inverse de

$$\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

*Solution.* On a :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 5 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) L_1 \leftrightarrow L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \phantom{x} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \phantom{x} \\ \phantom{x} \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) L_2 \leftarrow L_2 - L_3$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 + L_3 \\ \\ \\ \end{array}$$

Ainsi, $\begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est inversible, et son inverse est

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

### RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette méthode de détermination de l'inverse d'une matrice est appelée **Réduction de Gauss-Jordan**, en hommage à *Carl Friedrich Gauss* et *Wilhelm Jordan*, mais était connue des Chinois au $1^{\text{er}}$ siècle de notre ère, sous le nom *Fang cheng* dans *Les Neuf Chapitres sur l'art mathématique*.

**Définition 15.** — On appelle **rang** d'une matrice A, et on note $\mathrm{rg}(A)$ le rang du système associée $AX = 0$, où X représente le vecteur colonne des inconnues.

**Propriété 7.** — *On dispose des propriétés suivantes :*

- $\mathrm{rg}(A) = 0$ *si et seulement si la la matrice est nulle.*
- $\mathrm{rg}(A) = 1$ *si et seulement si toutes les colonnes de* A *sont colinéaires.*
- *Si la matrice* A *est carrée d'ordre* $n$, $\mathrm{rg}(A) = n$ *si et seulement si la matrice est inversible.*

# Exercices

## Calcul matriciel

**Exercice 1.** — Soit A la matrice de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Calculer $A^2$ et montrer qu'il existe deux réels $\alpha$ et $\beta$ tels que $A^2 = \alpha A + \beta I_3$. En déduire que la matrice A est inversible et calculer $A^{-1}$.

**Exercice 2.** — Dans chacun des cas suivants, calculer $A^n$ pour tout entier naturel $n$.

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Méthode 9.6.**

Pour déterminer $A^n$, on peut chercher une périodicité des puissances, c'est-à-dire un entier $p$ tel que $A^p = A$ ou $A^p = I_n$.

**Exercice 3.** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A peut s'écrire sous la forme $I_3 + J$ où J est une matrice à déterminer.
2. Calculer $J^2$ et $J^3$. En déduire l'expression pour tout entier $n$ de $A^n$ en fonction de $I_3, J$ et $n$.

**Exercice 4.** — Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A sous la forme $\alpha I_3 + \beta J$, où $\alpha$ et $\beta$ sont deux réels.
2. En déduire l'expression de $A^n$ pour tout entier $n$.

**Exercice 5.** — Trouver toutes les matrices M diagonales d'ordre 3 telles que

$$M^3 + 2M^2 - M - 2I_3 = 0$$

**Exercice 6.** — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ puis $A^3$.
2. En déduire que A n'est pas inversible.

3. Calculer $(I_3 - A)(I_3 + A + A^2)$. En déduire que $I_3 - A$ est inversible, et déterminer son inverse.
4. De la même manière, montrer que $I_3 + A$ est inversible, et déterminer son inverse.

**Exercice 7.** — Déterminer l'inverse des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R}$$

**Exercice 8.** — Pour quelle(s) valeur(s) de $a$ la matrice $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ est-elle inversible ?

**Exercice 9.** — Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^2 = A + 2I_3$. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.
2. Montrer que pour tout $n$, il existe deux réels $u_n$ et $v_n$ tels que $A^n = u_n A + v_n I_3$. On précisera les relations de récurrence entre $u_{n+1}$ et $u_n$, et entre $v_{n+1}$ et $v_n$.
3. On pose $\alpha_n = 2u_n + v_n$ et $\beta_n = u_n - v_n$. Reconnaître les suites $\alpha$ et $\beta$. En déduire l'expression de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$, puis $A^n$ pour tout $n$.

**Exercice 10.** — Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs du réel $\lambda$ la matrice $A - \lambda I_2$ n'est elle pas inversible ?
2. Déterminer toutes les matrices colonnes X telles que $AX = \lambda X$ lorsque $\lambda$ prend les valeurs trouvées au 1.

*Remarque : les $\lambda$ trouvés s'appellent les valeurs propres de la matrice, et les vecteurs colonnes trouvés au 2 les vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres. Nous y reviendrons plus tard dans l'année.*

## Suites et matrices

**Exercice 11.** — On considère les deux suites réels $(u_n)$ et $(v_n)$ définie par $u_0$, $v_0$ et pour tout $n$,

$$u_{n+1} = 6u_n - v_n \text{ et } v_{n+1} = u_n + 4v_n$$

En introduisant une matrice A bien choisie vérifiant

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$$

démontrer successivement que $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$, puis $A = 5I_2 + J$ avec $J^2 = 0$. Déterminer alors $A^n$, puis l'expression de $u_n$ et $v_n$ en fonction de $n$.

**Exercice 12.** — On considère la suite $u$ définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ et pour tout $n$,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$$

On définit les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer $P^{-1}$. Que vaut $D = P^{-1}AP$ ? En déduire $D^n$.
2. Montrer que pour tout $n$, $D^n = P^{-1}A^nP$. En déduire les coefficients de $A^n$.
3. Pour tout $n$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Vérifier que pour tout $n$, $X_{n+1} = AX_n$. En déduire $X_n$ en fonction de $A^n$ et de $X_0$.
   (b) Déterminer la valeur de $u_n$ en fonction de $n$.

**Remarque 12.** — Cet exercice est très classique. Il utilise ce que l'on appelle la diagonalisation de la matrice A (en écrivant $A = PDP^{-1}$ avec D une matrice diagonale - on reverra ça plus tard dans l'année) pour calculer les puissances $n^{me}$ de la matrice A, et en déduire un résultat sur une suite.