CHAPITRE 10

GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE DE L'ESPACE

Résumé

Ce chapitre est souvent délaissé par les élèves au concours.
Ce chapitre repose sur les bases connues des années précédentes, en les consolidant.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Concernant le produit scalaire :
- Connaître la définition du produit scalaire .... □
- Savoir calculer un produit scalaire dans le cas des coordonnées cartésiennes .... □

② Concernant le produit vectoriel :
- Connaître la notion de produit vectoriel et les différentes méthodes de calcul .... □
- Savoir utiliser le produit vectoriel pour déterminer l'aire d'un parallélogramme .... □

③ Concernant le produit mixte :
- Connaître la notion de produit mixte et les différentes méthodes de calcul .... □
- Savoir montrer que des vecteurs sont coplanaires .... □
- Savoir utiliser le produit mixte pour déterminer le volume d'un parallélépipède .... □

④ Concernant les plans :
- savoir déterminer une équation cartésienne de plan .... □
- savoir déterminer un système d'équations paramétriques de plan .... □
- savoir déterminer les intersections éventuelles de deux plans .... □
- savoir déterminer la distance d'un point à un plan .... □

⑤ Concernant les droites :
- savoir déterminer un système d'équations cartésiennes de droite .... □
- savoir déterminer un système d'équations paramétriques de droite .... □
- savoir déterminer la distance d'un point à une droite .... □

⑥ Concernant les sphères :
- savoir déterminer une équation cartésienne de sphère .... □
- savoir déterminer les caractéristiques d'une sphère connaissant une équation cartésienne... □

I. Repérage dans l'espace

Dans cette partie, on revient sur les bases de la géométrie de l'espace.

1) Base de l'espace et repère

Rappel 1. — *Trois vecteurs de l'espace sont dits **coplanaires** si et seulement si on peut trouver trois représentants de ces vecteurs situés dans un même plan.*

Remarque 1. — On dira plus tard que si trois vecteurs sont coplanaires, la famille composée de ces trois vecteurs est **liées**. Sinon, on dira qu'elle est **libre**.

Définition 1. — On appelle **base** de l'espace la donnée de trois vecteurs $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ non coplanaires. On dit que la base est

- **orthogonale** si et seulement si $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux.
- **orthonormée** ou orthonormale si et seulement si elle est orthogonale, et si $||\vec{\imath}|| = ||\vec{\jmath}|| = ||\vec{k}|| = 1$.

Proposition 10.1.

Soit $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ une base de l'espace. Alors pour tout vecteur $\vec{u}$ du plan, il existe trois réels uniques x, y et z tels que

$$\vec{u} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

x est appelé **abscisse** de $\vec{u}$, y est appelé **ordonnée**, z est appelé la **côte** et (x, y, z) représente les **coordonnées cartésiennes** du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On notera

$$\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \vec{u}\,(x; y; z)$$

Définition 2 (Repère)**.** — On appelle **repère** de l'espace la donnée d'un point O, appelé **origine** du repère, et d'une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
Le repère est dit orthogonal si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthogonale, et orthonormé si la base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est orthonormée.

Proposition 10.2.

Soit $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point A de l'espace, il existe trois réels x, y et z uniques vérifiant

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

x est appelé abscisse du point A, y ordonnée du point A et z la côte du point A. Le triplet $(x; y; z)$ représente les **coordonnées cartésiennes** de A, et on note $\mathrm{A}(x; y; z)$.

Remarque 2. — Toutes les formules de géométrie du plan ont leur équivalent dans l'espace. Ainsi, si on se donne un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace, et $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A}; z_\mathrm{A})$, $\mathrm{B}(x_\mathrm{B}; y_\mathrm{B}; z_\mathrm{B})$ deux points du plan, alors

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \quad \text{si I milieu de [AB]}, \quad I\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2}; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Exemple 1. — Soient $A(1;2;1)$ et $B(2;-1;1)$ deux points de l'espace. Déterminer les coordonnées du milieu de [AB] et les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.

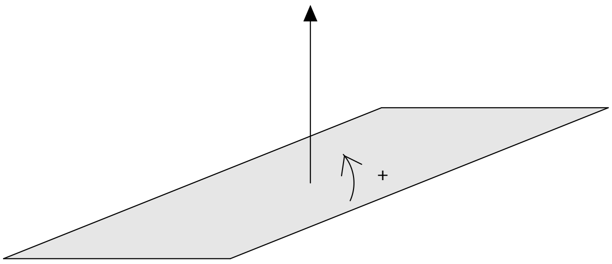
Solution. On a donc, en notant I le milieu de [AB] :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$$

2) Orientation

On souhaite orienter un repère de l'espace.

Remarque 3. — Si on se donne un plan et un vecteur $\overrightarrow{AB}$ non contenu dans ce plan, le sens direct est le sens trigonométrique si on regarde le plan depuis le point B, extrémité du vecteur extérieur.



Définition 3. — Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est dite **directe** si $\sin(\vec{\imath}; \vec{\jmath}) > 0$, dans le plan contenant $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$, orienté par le vecteur $\vec{k}$.

3) Produit scalaire dans l'espace

Définition 4. — On se donne une base **orthonormée** $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. On définit la **norme** d'un vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ par

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ainsi, la distance entre deux points $A(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$ est donnée par

$$AB = ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Exemple 2. — Soient $A(1;2;1)$ et $B(2;-1;1)$ deux points de l'espace dans un repère orthonormé. Déterminer la longueur AB.

Solution. On a
$$AB = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{10}$$

Définition 5. — Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{||\vec{u} + \vec{v}||^2 - ||\vec{u}||^2 - ||\vec{v}||^2}{2}$$

Exemple 3. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\\-2\end{pmatrix}$. Déterminer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

Solution. On a $\vec{u} + \vec{v}\begin{pmatrix}3\\1\\-1\end{pmatrix}$, puis
$$||\vec{u} + \vec{v}||^2 = 11, \quad ||\vec{u}||^2 = 6 \quad \text{et} \quad ||\vec{v}||^2 = 9$$
et donc
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{11-6-9}{2} = -2$$

Propriété 1. — *Le produit scalaire dans l'espace vérifie les même propriétés que dans le plan ; pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ et réel λ, on a :*

- *homogénéité :* $(\lambda\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda\vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
- *bilinéarité :* $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$ *et* $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- *symétrie :* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
- *positivité :* $\vec{u} \cdot \vec{u} = ||\vec{u}||^2$.
- *caractère défini :* $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ *si et seulement si* $\vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Dans le cas où on dispose d'un repère orthonormé, on dispose d'une formule simple pour calculer le produit scalaire dans l'espace.

Proposition 10.3.

On se donne un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace.

Alors
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

Exemple 4. — Si $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé, alors

$$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = 1\times(-1)+2\times 2+3\times 2 = 9$$

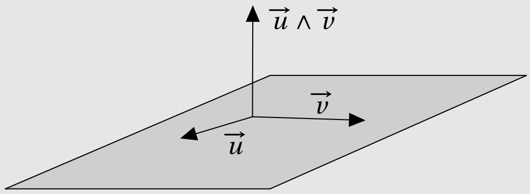
II. Produit vectoriel

1) Définition

Définition 6. — Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. On appelle **produit vectoriel** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, et on note $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$, le **vecteur** vérifiant :

- la norme de $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est
$$||\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}|| = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\left|\sin(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})\right|$$
- la direction de $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}$ est orthogonale à $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
- le triplet $(\overrightarrow{u};\overrightarrow{v};\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$ est dans le sens direct

Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, on pose $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.



Exercice 1. — Soit $(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{k})$ une base orthonormée directe de l'espace. Calculer les 9 produits vectoriels possibles en prenant deux couples ordonnées de vecteurs de la base.

Solution. On rapidement

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{\imath}\wedge\overrightarrow{k} = -\overrightarrow{\jmath}\\
&\overrightarrow{\jmath}\wedge\overrightarrow{\imath} = -\overrightarrow{k}, \quad \overrightarrow{\jmath}\wedge\overrightarrow{\jmath} = \overrightarrow{0}, \quad \overrightarrow{\jmath}\wedge\overrightarrow{k} = \overrightarrow{\imath}\\
&\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\imath} = \overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\jmath} = -\overrightarrow{\imath}, \quad \overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{k} = \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

2) Propriétés

Propriété 2. — *Soient $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ trois vecteurs de l'espace, et λ un réel.*

- *antisymétrie :* $\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{u}$.
- *homogénéité :* $(\lambda\overrightarrow{u})\wedge\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u}\wedge(\lambda\overrightarrow{v}) = \lambda(\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v})$.
- *bilinéarité :*

$$(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})\wedge\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}+\overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{w} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u}\wedge(\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}) = \overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{v}+\overrightarrow{u}\wedge\overrightarrow{w}$$

Démonstration. On utilise la définition du produit vectoriel. □

Remarque 4. — ⚠ Le produit vectoriel n'est pas associatif. En effet,

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) \neq (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$$

On dispose d'une caractérisation des vecteurs colinéaires.

Proposition 10.4.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

Démonstration. En effet, s'ils ne sont pas colinéaires, leur angle n'est pas égal à 0 ou π modulo 2π, et le sinus est donc non nul. S'ils sont colinéaires, par définition, leur produit vectoriel est nul. □

Proposition 10.5. Coordonnées cartésiennes

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée directe. Alors

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} yz' - y'z \\ zx' - z'x \\ xy' - x'y \end{pmatrix} \quad \text{soit} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} \\ \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Exemple 5. — Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ deux vecteurs de l'espace dans une base orthonormée directe. Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

Solution. On a

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \times (-1) - 3 \times 4 \\ 3 \times 3 - 2 \times (-1) \\ 2 \times 4 - 1 \times 3 \end{pmatrix}$$

soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -13 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Remarque 5. — On constate que, dans le plan contenant $\vec{u}$ et $\vec{v}$,

$$||\vec{u} \wedge \vec{v}|| = \left|[\vec{u} ; \vec{v}]\right|$$

Ainsi, l'aire du parallélogramme ABCD peut être calculée par $||\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}||$.

III. Produit mixte

La notion de produit mixte étend la définition de déterminant à l'espace.

1) Définition

Définition 7. — Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace. On appelle **produit mixte** des trois vecteurs, et on note $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}]$ ou $\det(\vec{u};\vec{v};\vec{w})$ le nombre réel

$$[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = (\vec{u}\wedge\vec{v})\cdot\vec{w}$$

Remarque 6. — Ainsi, le produit mixte, contrairement au produit vectoriel, est **un réel**.

Exemple 6. — Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ une base orthonormée directe. Alors

$$[\vec{k};\vec{\jmath};\vec{\imath}] = (\vec{k}\wedge\vec{\jmath})\cdot\vec{\imath} = -\vec{\imath}\cdot\vec{\imath} = -1$$

Exercice 2. — Déterminer de même $[\vec{\imath};\vec{k};\vec{\jmath}]$ et $[\vec{\jmath};\vec{k};\vec{\jmath}]$.

Solution. On a rapidement

$$[\vec{\imath};\vec{k};\vec{\jmath}] = (\vec{\imath}\wedge\vec{k})\cdot\vec{\jmath} = -\vec{\jmath}\cdot\vec{\jmath} = -1 \quad \text{et} \quad [\vec{\jmath};\vec{k};\vec{\jmath}] = (\vec{\jmath}\wedge\vec{k})\cdot\vec{\jmath} = \vec{\imath}\cdot\vec{\jmath} = 0$$

2) Propriétés

En utilisant les différentes propriétés du produit vectoriel et du produit scalaire, on obtient les propriétés suivantes :

Propriété 3. — *Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et $\vec{a}$ quatre vecteurs de l'espace, et λ un réel.*

- *on a $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = [\vec{v};\vec{w};\vec{u}] = [\vec{w};\vec{u};\vec{v}]$.*
- *homogénéité : $[\lambda\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = [\vec{u};\lambda\vec{v};\vec{w}] = [\vec{u};\vec{v};\lambda\vec{w}] = \lambda[\vec{u};\vec{v};\vec{w}]$.*
- *trilinéarité : $[\vec{u}+\vec{a};\vec{v};\vec{w}] = [\vec{u};\vec{v};\vec{w}] + [\vec{a};\vec{v};\vec{w}]$, et de même pour les deux autres variables.*
- *alterné : $[\vec{v};\vec{u};\vec{w}] = -[\vec{u};\vec{v};\vec{w}]$ et de même en inversant deux vecteurs consécutifs.*

On dispose, comme pour le produit vectoriel avec la colinéarité, d'une caractérisation de la coplanarité :

Proposition 10.6.

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs. Alors $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si $[\vec{u};\vec{v};\vec{w}] = 0$.

Exercice 3. — Montrer que les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\4\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}8\\-14\\7\end{pmatrix}$ sont coplanaires.

Solution. On constate que

$$\vec{u}\wedge\vec{v}\begin{pmatrix}-14\\-6\\4\end{pmatrix}$$

Ainsi

$$[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,] = -14\times 8+(-6)\times(-14)+4\times 7 = 0$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont donc coplanaires.

Proposition 10.7. Coordonnées cartésiennes

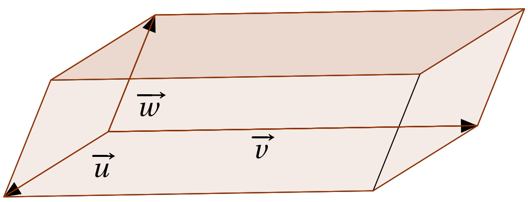
Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}x''\\y''\\z''\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace dans une base orthonormée directe.

Alors

$$[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,] = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x(y'z''-y''z')-y(x'z''-z'x'')+z(x'y''-y'x'')$$

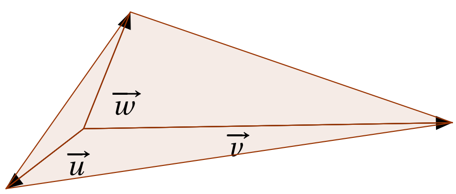
Démonstration. Cela découle des définition du produit scalaire et du produit vectoriel. □

Remarque 7. — Tout comme le déterminant dans le plan permet de calculer l'aire d'un parallélogramme, le produit mixte dans l'espace permet de calculer le volume du parallélépipède construit sur les trois vecteurs. Ainsi, si $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs non colinéaires, le parallélépipède construit sur $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ a pour volume



$$\mathscr{V}_P = \left|[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,]\right|$$

De même, le tétraèdre construit à partir de ces trois vecteurs a pour volume



$$\mathscr{V}_T = \frac{1}{6}\left|[\vec{u}\,;\vec{v}\,;\vec{w}\,]\right|$$

IV. Plans

On se donne dans l'ensemble de cette section un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

1) Système d'équations paramétriques d'un plan

Définition 8. — Soient A un point de l'espace, et $\vec{u}$, $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de l'espace. On appelle **plan affine** $(A; \vec{u}; \vec{v})$, ou encore plan passant par A et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, l'ensemble des points M de l'espace qui vérifient

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + t'\vec{v} \quad \text{avec} \quad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

c'est-à-dire que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires.

Définition 9. — Soient A et B deux points de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace à égale distance de A et B est un plan, appelé **plan médiateur** du segment [AB].

Proposition 10.8.

Un point $M(x;y;z)$ est dans le plan passant par $A(x_A;y_A;z_A)$ et dirigé par $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ non colinéaires si et seulement s'il existe $(t,t') \in \mathbb{R}^2$ vérifiant

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases}$$

Définition 10. — On appelle **système d'équations paramétriques** du plan $(A; \vec{u}; \vec{v})$ le système

$$\begin{cases} x = x_A + ta + t'a' \\ y = y_A + tb + t'b' \\ z = z_A + tc + t'c' \end{cases} \qquad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

Exemple 7. — Déterminer un système d'équations paramétriques de plan passant par $A(1;2;3)$ et dirigés par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.

Solution. On a rapidement le système d'équations paramétriques suivant :

$$\begin{cases} x = 1 + t + 2t' \\ y = 2 - t + t' \\ z = 3 - t' \end{cases} \qquad (t,t') \in \mathbb{R}^2$$

Remarque 8. — Trois points non alignés A, B, C définissent un plan $(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

2) Équation cartésienne d'un plan

Définition 11. — Soit $\mathscr{P}$ un plan de l'espace. Un vecteur $\vec{n}$ est un vecteur **normal** du plan $\mathscr{P}$ si et seulement s'il est orthogonal à tout vecteur inclus dans $\mathscr{P}$.

Remarque 9. — Il suffit qu'il soit orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan, en utilisant la définition d'un plan vue précédemment.

Proposition 10.9.

Soient A un point de l'espace et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur non nul.

L'ensemble des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ orthogonal à $\vec{n}$ est le plan, passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$. Les points $\mathrm{M}(x;y;z)$ de ce plan vérifient une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$, appelée **équation cartésienne du plan**.
Réciproquement, l'ensemble des points $\mathrm{M}(x;y;z)$ de l'espace vérifiant $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non tous nuls, est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Remarque 10. — ⚠ L'équation cartésienne d'un plan dans l'espace ressemble à l'équation cartésienne d'une droite dans un plan. Mais attention : une droite est donnée par deux équations cartésiennes de plan. Nous le verrons plus tard.

Méthode 10.1.

Pour déterminer l'équation cartésienne d'un plan

- si on connait un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et un point A, on écrit que $\mathrm{M}(x;y;z)$ appartient au plan si et seulement si $ax+by+cz+d=0$, où d est à déterminer en utilisant les coordonnées de A.
- si on connait deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi qu'un point A :
  — soit on prend $\vec{u}\wedge\vec{v}$ comme vecteur normal et on applique la méthode précédente;
  — soit on écrit que $\mathrm{M}(x;y;z)$ appartient au plan si et seulement si $[\overrightarrow{\mathrm{AM}};\vec{u};\vec{v}]=0$;
  — soit on forme un système d'équations paramétriques du plan et on élimine t et t'.

Exemple 8. — Soient A(1;0;0), B(0;1;0), C(0;0;1) et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Déterminer une équation du plan $\mathscr{P}_1$ passant par l'origine et de vecteur normal $\vec{n}$, du plan (ABC), de $\mathscr{P}_2$ plan perpendiculaire à (ABC) passant par C, et du plan médiateur de [AB].

Solution. $\mathscr{P}_1$ a une équation de la forme $y-z+d=0$, avec $\mathrm{O}\in\mathscr{P}_1$, c'est-à-dire $d=0$. Ainsi

$$\mathscr{P}_1 : y-z=0$$

Le plan (ABC) passe par A et est dirigé par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AC}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ non colinéaires. Ainsi, $\overrightarrow{n'}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ est un vecteur normal. Puisque $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, (ABC) a une équation de la forme $x+y+z+d=0$. Or $\mathrm{A}\in(\mathrm{ABC})$

donc $d = -1$:
$$(\mathrm{ABC}) : x + y + z - 1 = 0$$

Un plan $\mathscr{P}_2$ est perpendiculaire à (ABC) donc a pour vecteur normal (par exemple) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$. Ainsi, $\mathscr{P}_2$ a une équation de la forme $x - z + d = 0$, avec $\mathrm{C} \in \mathscr{P}_2$, et donc $d = 1$.

$$\mathscr{P}_2 : x - z + 1 = 0$$

Enfin, le plan médiateur $\mathscr{P}_3$ de [AB] passe par I milieu de [AB] et a comme vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Ainsi, $\mathscr{P}_3$ a une équation de la forme $-x + y + d = 0$, et passe par $\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$. Donc $d = 0$ et $\mathscr{P}_3 : -x + y = 0$.

Méthode 10.2.

Pour déterminer des vecteurs non colinéaires d'un plan ainsi qu'un point A :

- si on connait un système d'équation paramétrique, il suffit de prendre des valeurs quelconques pour t et t' pour obtenir un point, et de prendre les coefficients de t (respectivement de t') pour obtenir des vecteurs directeurs.
- si on connait un point A , un vecteur directeur u et un vecteur normal n, on obtient un deuxième vecteur directeur en prenant $\vec{v} = \vec{u} \wedge \vec{n}$.
- si on connait deux points distincts du plan A et B, et un vecteur normal, on dispose de deux vecteurs directeurs : $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \vec{n}$.
- si on connait une équation cartésienne, on se ramène au cas précédent en récupérant un vecteur normal et deux points du plan.

Exemple 9. — Donner un point et deux vecteurs directeurs du plan d'équation $x - z + 1 = 0$.

Solution. Le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan. De plus, $\mathrm{A}(1;0;2)$ et $\mathrm{B}(-1;0;0)$ sont deux points du plan. Ainsi, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur du plan, et $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \vec{n}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ est également un vecteur directeur du plan.

Bilan : $\mathrm{A}(1;0;2)$ est un point du plan et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}-2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs.

3) Distance d'un point à un plan

La formule est similaire à la distance d'un point à une droite dans le plan :

Proposition 10.10.

Soit $\mathscr{P}$ un plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ (avec a, b, c non tous nuls), et $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A}; z_\mathrm{A})$ un point. La distance de A au plan $\mathscr{P}$ est la distance de A à son projeté orthogonal sur $\mathscr{P}$. Elle est donnée par
$$d(\mathrm{A};\mathscr{P}) = \frac{|ax_\mathrm{A} + by_\mathrm{A} + cz_\mathrm{A} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Démonstration. Même idée que pour la distance d'un point à une droite dans le plan. □

Exemple 10. — Déterminer la distance du point A(1;2;1) au plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $x+2y-3z+2=0$.

Solution. En appliquant la formule précédente

$$d(\mathrm{A};\mathscr{P}) = \frac{|1+2\times 2-3\times 1+2|}{\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{7}$$

V. Droites

On se donne dans l'ensemble de cette section un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace.

1) Définitions

Définition 12. — Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de l'espace, et A et B deux points distincts de l'espace. On appelle :

- **droite vectorielle** dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$:

$$\mathscr{D}_{\vec{u}} = \left\{\lambda\vec{u},\ \lambda\in\mathbb{R}\right\}$$

- **droite** (ou **droite affine**) passant par A et dirigée par $\vec{u}$ l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires :

$$\mathscr{D}_{\mathrm{A},\vec{u}} = \left\{\mathrm{M\ du\ plan},\quad \exists\,\lambda\in\mathbb{R},\quad \overrightarrow{\mathrm{AM}} = \lambda\vec{u}\right\}$$

  $\vec{u}$ est appelé **vecteur directeur** de la droite.
- droite passant par A et B la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Définition 13 (Vocabulaire). —

- Deux droites sont dites **parallèles** si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites sont **perpendiculaires** si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Définition 14. — Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle **vecteur normal** de la droite $\mathscr{D}$ tout vecteur orthogonal à $\vec{u}$.

2) Représentations paramétriques

Théorème 10.11.

Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $\mathrm{A}(x_\mathrm{A};y_\mathrm{A};z_\mathrm{A})$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ non nul. Alors $\mathrm{M}(x;y;z)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement

$$\begin{cases} x &= x_\mathrm{A}+ta \\ y &= y_\mathrm{A}+tb \\ z &= z_\mathrm{A}+tc \end{cases} \quad \text{avec} \quad t\in\mathbb{R}$$

Cette représentation est appelée **système d'équations paramétriques**.

Démonstration. $M(x;y)$ est sur la droite $\mathscr{D}$ si et seulement si $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, c'est-à-dire s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, ce qui s'écrit

$$\begin{cases} x = x_A + ta \\ y = y_A + tb \\ z = z_A + tc \end{cases} \quad \text{avec} \quad t \in \mathbb{R}$$

□

Exemple 11. — Soit $\mathscr{D}$ la droite, passant par $A(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Alors $\mathscr{D}$ a comme système d'équations paramétriques

$$\begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

3) Intersection de plans et représentation cartésienne

Proposition 10.12.

Soient deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ de vecteur normal respectif $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$. Alors, on dispose de trois cas possibles :

- soit les deux plans sont d'intersection vide : ils sont strictement parallèles, et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires et $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \vec{0}$.
- soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont confondus, et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires et $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} = \vec{0}$.
- soit $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ se coupent en une droite dirigée par $\vec{n} \wedge \overrightarrow{n'} \neq \vec{0}$.

Définition 15. — Un système d'équations cartésiennes d'une droite est formé des équations $ax+by+cz+d=0$ et $a'x+b'y+c'z+d=0$ de deux plans non parallèles contenant cette droite.

Méthode 10.3.

Pour déterminer l'intersection de deux plans, on s'intéresse à leurs vecteurs normaux. S'ils ne sont pas colinéaires, leur intersection est une droite, dont on obtient un système d'équations cartésiennes.

Exemple 12. — Soient $\mathscr{P}_1 : 4x-2z+1=0$, $\mathscr{P}_2 : -2x+z=0$ et $\mathscr{P}_3 : x+y+z=2$. Déterminer les intersections deux à deux de ces trois plans.

Solution. Les vecteurs normaux respectifs de $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont $\vec{n}_1\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\vec{n}_2\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n}_3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- $\vec{n}_1 = -2\vec{n}_2$. Donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$ sont parallèles (et non confondues).

- $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants en une droite.
- $\vec{n}_2$ et $\vec{n}_3$ ne sont pas colinéaires, donc les plans $\mathscr{P}_2$ et $\mathscr{P}_3$ sont sécants en une droite.

Méthode 10.4.

Pour déterminer un système d'équations cartésiennes d'une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, on écrit que $\mathrm{M}(x;y;z)$ est sur cette droite si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u} = \vec{0}$. On obtiendra trois équations cartésiennes, dont l'une est redondante. On en choisit deux pour obtenir le système d'équations cartésiennes.

Exercice 4. — Déterminer un système d'équations cartésiennes de la droite passant par $\mathrm{A}(1;0;1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Solution. $\mathrm{M}(x;y;z)$ est sur la droite passant par $\mathrm{A}(1;0;1)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ si et seulement si $\overrightarrow{\mathrm{AM}} \wedge \vec{u} = \vec{0}$, soit

$$\left\{\begin{array}{lcl} y-(z-1) & = & 0 \\ z-1-(x-1) & = & 0 \\ x-1-y & = & 0 \end{array}\right.$$

Ainsi, un système d'équations cartésiennes de la droite cherchée est

$$\left\{\begin{array}{lcl} y-z+1 & = & 0 \\ z-x & = & 0 \end{array}\right.$$

4) Distance d'un point à une droite

La formule de la distance d'un point à une droite est légèrement différente :

Proposition 10.13.

Soit une droite $\mathscr{D}$, passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Soit M un point du plan. Alors,

$$d(\mathrm{M},\mathscr{D}) = \frac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}||}{||\vec{u}||}$$

Exemple 13. — Soient $\mathscr{D}$ la droite passant par $\mathrm{A}(1;2;3)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, et $\mathrm{M}(1;0;2)$.

Déterminer la distance de M à la droite $\mathscr{D}$.

Solution. Alors

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}0\\-2\\-1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}3\\1\\-2\end{pmatrix}$$

et donc

$$d(\mathrm{A};\mathscr{D}) = \frac{||\vec{u} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AM}}||}{||\vec{u}||} = \frac{\sqrt{3^2+1^2+(-2)^2}}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{14}{3}}$$

VI. Sphères

Dans l'ensemble de cette section, on se place dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

1) Définition

Définition 16. — Soit A un point de l'espace. La **sphère** $\mathscr{S}_{\mathrm{A},r}$ de centre A et de rayon $r \geqslant 0$ est l'ensemble des points de l'espace à une distance r de A :

$$\mathscr{C}_{\mathrm{A},r} = \{\mathrm{M} \text{ de l'espace},\ \mathrm{AM} = r\}$$

Remarque 11. — On ne confondra pas la sphère avec la boule. La boule de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M de l'espace à une distance inférieure ou égale à r de A.
On rappelle que le volume d'une boule est $\mathscr{V}_{\mathscr{B}} = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Remarque 12. — Soit $\mathrm{A}(x_\mathrm{A}; y_\mathrm{A}; z_\mathrm{A})$ un point de l'espace. $\mathrm{M}(x; y; z)$ est sur la sphère, de centre A et de rayon r si et seulement si $\mathrm{AM} = r$, c'est-à-dire

$$(x-x_\mathrm{A})^2 + (y-y_\mathrm{A})^2 + (z-z_\mathrm{A})^2 = r^2$$

Cette écriture est appelée **équation cartésienne** de la sphère.

Définition 17 (Equation cartésienne)**.** — Toute sphère du plan admet une équation du type $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$. Réciproquement, tout ensemble admettant une équation du type $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ est une sphère.

Exemple 14. — La sphère de centre $\mathrm{A}(1;1;3)$ et de rayon 1 a pour équation cartésienne $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2=1^2$, c'est-à-dire $x^2+y^2+z^2-2x-2y-6y+10=0$.

Méthode 10.5.

Connaissant l'équation cartésienne d'une sphère, on obtient le centre et le rayon en mettant les différents carrés sous forme canonique, comme pour l'équation cartésienne d'un cercle.

Exercice 5. — Déterminer le centre et le rayon de la sphère d'équation cartésienne $x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-10=0$.

Solution. En mettant sous forme canonique :

$$\begin{aligned} x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z-9=0 &\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+4y+z^2+2z-10=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2-1+(y+2)^2-4+(z+1)^2-1-10=0 \\ &\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=16=4^2 \end{aligned}$$

Il s'agit donc de la sphère de centre $A(1;-2;-1)$ et de rayon 4.

Exercices

Dans l'ensemble des exercices, $(O; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé.

Équations et intersections

Exercice 6 (Équations cartésiennes de plan)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans suivant :

1. (ABC) où $A(1;2;3)$, $B(0;1;-2)$ et $C(2;1;2)$.
2. plan médiateur du segment [AB], où $A(1;2;3)$ et $B(2;1;-1)$.
3. passant par $A(-1;2;3)$ et de vecteurs directeurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}$.
4. passant par $A(2;1;3)$ et parallèle au plan d'équation $2x+3y+4z-18=0$.
5. passant par $A(1;2;3)$ et orthogonal à $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.
6. de systèmes d'équations paramétriques
$$\left\{\begin{array}{ccccccc} x & = & 2 & + & s & + & 2t \\ y & = & 2 & + & 2s & + & t \\ z & = & 1 & - & s & - & t \end{array}\right. \qquad (t,s)\in\mathbb{R}^2$$
7. contenant la droite (d) et parallèle à (d') avec
$$(d) : \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 1 \\ x-4y+z & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (d')\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x-y+z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 7. — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Déterminer une équation d'un plan parallèle à (Ox), d'un plan parallèle à (Oy) et d'un plan parallèle à (Oz)

Exercice 8 (Système d'équations cartésiennes de droite)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Déterminer un système d'équations cartésiennes des droites suivantes :

1. passant par $A(1;2;3)$ et dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.
2. (AB) où $A(1;2;3)$ et $B(2;-1;2)$.
3. passant par $A(1;2;3)$ et parallèle à la droite $d : \left\{\begin{array}{rcl} x+y-2z-1 & = & 0 \\ x+2y+2z-2 & = & 0 \end{array}\right.$.
4. perpendiculaire à (d) et (d') passant par $A(1;2;3)$, avec
$$(d) : \left\{\begin{array}{rcl} 3x-y+z & = & 1 \\ x-4y+z & = & 2 \end{array}\right. \quad \text{et} \quad (d')\left\{\begin{array}{rcl} x+y+z & = & 4 \\ 2x-y+z & = & 2 \end{array}\right.$$

Exercice 9 (Intersection). — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Déterminer la nature des intersections suivantes :

1. de la sphère S de centre $A(1;-3;1)$ et de rayon 3, avec le plan $\mathscr{P}_1 : x+y-3z=-3$ et avec le plan $\mathscr{P}_2 : 2x-y+2z+2=0$.
2. de la sphère de centre O et de rayon 2, et la droite D, dirigée par $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ passant par $A(1;2;0)$.
3. des droites (d) et (d'), dont un système d'équations paramétriques est donné par :

$$(d) : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & + & t \\ y & = & 6 & + & 2t \\ z & = & 4 & - & t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{et} \quad (d') : \left\{\begin{array}{rcrcr} x & = & 8 & + & 5t \\ y & = & 2 & - & 2t \\ z & = & 6 & + & t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}$$

Méthode 10.6.

Pour déterminer la nature de l'intersection d'une sphère et d'un plan, on détermine la distance du centre de la sphère au plan, et selon sa valeur :

- si la distance est strictement supérieure au rayon, l'intersection est vide ;
- si la distance est égale au rayon, l'intersection est un point (cas du plan tangent à la sphère) ;
- si la distance est strictement inférieure au rayon, l'intersection st un cercle.

Méthode 10.7.

Pour déterminer l'intersection de deux droites dont on connait un système d'équations paramétriques, on égalise les coordonnées pour obtenir un système de trois équations à deux inconnues (t et t').

- si on n'obtient pas de solutions, les droites ne sont pas concourantes ;
- si on obtient une unique solution, les droites sont sécantes ;
- si on obtient une infinité de solution, les droites sont confondues.

Résultats généraux

Exercice 10 (Identité de Lagrange). — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

1. Montrer que $\vec{u} = (\vec{u}\cdot\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{u}\cdot\vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{u}\cdot\vec{k})\vec{k}$.
2. Montrer que

$$||\vec{u}\wedge\vec{v}||^2 + (\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = ||\vec{u}||^2||\vec{v}||^2$$

> **Remarque 13.** — Cette égalité est appelée **identité de Lagrange**

3. Montrer que si le vecteur $\vec{u}$ est unitaire (c'est-à-dire de norme 1), alors

$$||\vec{u}\wedge\vec{\imath}||^2 + ||\vec{u}\wedge\vec{\jmath}||^2 + ||\vec{u}\wedge\vec{k}||^2 = 2$$

En déduire alors que au moins l'un des nombres $||\vec{u} \wedge \vec{\imath}\,||$, $||\vec{u} \wedge \vec{\jmath}\,||$, $||\vec{u} \wedge \vec{k}\,||$ est supérieure à $\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Exercice 11 (Plan bissecteur)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$. Soient $\mathscr{P}_1 : 2x - 4y + 1 = 0$ et $\mathscr{P}_2 : 6x - 2y - 3z + 2 = 0$. Déterminer l'ensemble des points équidistants des plans $\mathscr{P}_1$ et $\mathscr{P}_2$.

Exercice 12 (Torseurs)**.** — On munit l'espace d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
On appelle **torseur** de l'espace une application $\vec{M}$ qui à tout point P de l'espace, associe un vecteur $\vec{M}(P)$ de l'espace, vérifiant la relation de **Varignon** :

$$\forall\ (A,B) \text{ de l'espace}, \quad \vec{M}(B) = \vec{M}(A) + \vec{R} \wedge \overrightarrow{AB}$$

Le vecteur $\vec{R}$ est appelé **résultante** de la fonction $\vec{M}$.

1. Montrer que si $\vec{R}$ et $\vec{S}$ sont des résultantes du même torseur $\vec{M}$, alors $\vec{R} = \vec{S}$. Ainsi, la résultante est **unique**.
2. Soit $\vec{M}$ un torseur. Montrer que pour tous points A et B de l'espace, on a
$$\vec{M}(A) \cdot \overrightarrow{AB} = \vec{M}(B) \cdot \overrightarrow{AB}$$
(cette relation est appelée **équiprojectivité** du torseur).
3. On se donne un vecteur $\vec{R}$ de l'espace, un point A de l'espace et un vecteur $\vec{u}$ de l'espace. Montrer qu'il existe un unique torseur $\vec{M}$ de résultante $\vec{R}$ et tel que $\vec{M}(A) = \vec{u}$.
Ainsi, il suffit de connaître la résultante d'un torseur, et sa valeur en un point (le “moment en un point”). Ce torseur est en général noté $\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_A$.
4. Soient A un point de l'espace, et $\vec{R}, \vec{R'}, \vec{u}$ et $\vec{u'}$ quatre vecteurs de l'espace. Montrer que
$$\left\{ \begin{array}{c} \vec{R} \\ \vec{u} \end{array} \right\}_A + \left\{ \begin{array}{c} \vec{R'} \\ \vec{u'} \end{array} \right\}_A = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R} + \vec{R'} \\ \vec{u} + \vec{u'} \end{array} \right\}_A$$
5. Soient $\vec{M}$ et $\vec{M'}$ deux torseurs de résultantes respectives $\vec{R}$ et $\vec{R'}$. Montrer que le nombre
$$\vec{R} \cdot \vec{M'}(A) + \vec{R'} \cdot \vec{M}(A)$$
est indépendant du point A de l'espace choisi. On l'appelle le **coproduit** de ces torseurs.
Montrer que ce coproduit d'un torseur avec lui même est nul si et seulement si le torseur est glisseur, c'est-à-dire si le torseur est nul en un point.

