CHAPITRE 11

ESPACES VECTORIELS

Résumé

Ce chapitre est très important et tombe régulièrement au concours. Il est abstrait, mais pas difficile, et surtout, essentiel pour d'autres chapitres de l'année.
Il doit être maitrisé dans son ensemble.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels :
- Savoir démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel......... □
- Savoir montrer qu'un vecteur est une combinaison linéaire d'autres vecteurs .... □
- Savoir montrer que deux espaces sont en somme directe...................................... □
- Savoir montrer que deux espaces sont supplémentaires dans un espace vectoriel............ □

② Maitriser la notion de base :
- Savoir montrer qu'une famille est libre... □
- Savoir montrer qu'une famille est génératrice .... □
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel............................ □
- Connaître les bases canoniques des espaces usuels... □
- Savoir déterminer la dimension d'un sous-espace vectoriel.................................. □
- Savoir déterminer les coordonnées d'un vecteur dans une base............................... □

③ Concernant les applications linéaires :
- Savoir montrer qu'une application est linéaire.. □
- Savoir déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire............................. □
- Savoir démontrer qu'une application linéaire est injective, surjective, bijective............... □

Dans l'ensemble de ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Espaces vectoriels

1) Généralités

Définition 1. — Soit E un ensemble non vide.

- On dit que la loi $+$ est une **loi de composition interne** sur E si $\forall\ (x,y) \in \mathrm{E}^2, x+y \in \mathrm{E}$.
- On dit que la loi $\cdot$ est une **loi de composition externe** sur E si $\forall\ x \in \mathrm{E}, \forall\ \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \cdot x \in \mathrm{E}$.

Exemple 1. — L'exemple le plus classique est l'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. La loi d'addition de matrices est une loi de composition interne, et la multiplication par un élément de $\mathbb{K}$ est une loi de composition externe.

Définition 2. — Soit E un ensemble non vide, muni d'une loi interne, noté $+$, et d'une loi externe, noté $\cdot$. On dit que E est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel** si les lois vérifient les propriétés suivantes :

- (commutativité de +) : $\forall\ (x,y) \in \mathrm{E}^2, x+y = y+x$.
- (associativité de +) : $\forall\ (x,y,z) \in \mathrm{E}^3, (x+y)+z = x+(y+z)$
- (neutre pour +) : il existe un élément, noté 0_{E}, tel que $\forall\ x \in \mathrm{E}, x+0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}+x = x$.
- (inverse pour +) : pour tout $x \in \mathrm{E}$, il existe un élément $y \in \mathrm{E}$, tel que $x+y = y+x = 0_{\mathrm{E}}$. Cet élément est appelé *opposé* de x, et est noté $-x$.
- (neutre pour $\cdot$) $\forall\ x \in \mathrm{E}, 1.x = x$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \forall\ (x,y) \in \mathrm{E}^2, \lambda.(x+y) = \lambda.x + \lambda.y$
- (distributivité de $\cdot$) $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\ x \in \mathrm{E}, (\lambda+\mu).x = \lambda.x + \mu.x$
- $\forall\ (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2, \forall\ x \in \mathrm{E}, \lambda.(\mu.x) = (\lambda \times \mu).x$.

Remarque 1. — Si E est un espace vectoriel, les éléments de E sont alors appelés les **vecteurs**, et les réels sont appelés les **scalaires**. L'élément 0_{E} est appelé vecteur nul.

Remarque 2. — Les quatre premières propriétés font de $(\mathrm{E},+)$ ce qu'on appelle un **groupe abélien** ou groupe commutatif.

Remarque 3. — Le symbole $\cdot$ de la loi de composition externe est très souvent omis. On notera plus souvent $2x$ plutôt que $2 \cdot x$.

Proposition 11.1.

Les ensembles $\mathbb{K}^n$ (ou $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) pour $n \geqslant 1$, munis de l'addition de vecteurs, et de la multiplication par un réel, sont des espaces vectoriels.

Démonstration. En effet, si $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ alors

$$\mathrm{A}+\mathrm{B} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1+a_1 \\ \vdots \\ b_n+a_n \end{pmatrix} = \mathrm{B}+\mathrm{A}$$

$$(A+B)+C = \begin{pmatrix} (a_1+b_1)+c_1 \\ \vdots \\ (a_n+b_n)+c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+(b_1+c_1) \\ \vdots \\ a_n+(b_n+c_n) \end{pmatrix} = A+(B+C)$$

$$A+0_{n,1} = \begin{pmatrix} a_1+0 \\ \vdots \\ a_n+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+a_1 \\ \vdots \\ 0+a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A$$

$$A+(-A) = \begin{pmatrix} a_1+(-a_1) \\ \vdots \\ a_n+(-a_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{n,1}$$

$$1.A = \begin{pmatrix} 1.a_1 \\ \vdots \\ 1.a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = A$$

$$\lambda.(A+B) = \lambda.\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ \vdots \\ a_n+b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(a_1+b_1) \\ \vdots \\ \lambda(a_n+b_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\lambda b_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n+\lambda b_n \end{pmatrix} = \lambda.\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} + \lambda.\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = \lambda.A+\lambda.B$$

$$(\lambda+\mu).A = \begin{pmatrix} (\lambda+\mu)a_1 \\ \vdots \\ (\lambda+\mu)a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_1+\mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda a_n+\mu a_n \end{pmatrix} = \lambda.A+\mu.A$$

$$\lambda.(\mu.A) = \lambda.\begin{pmatrix} \mu a_1 \\ \vdots \\ \mu a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda\mu a_1 \\ \vdots \\ \lambda\mu a_n \end{pmatrix} = (\lambda\times\mu).A$$

□

Remarque 4. — En utilisant la même méthode, on peut prouver que :

- L'ensemble des matrices $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des fonctions $\mathscr{F}(I,\mathbb{K}) = \mathbb{K}^I$ d'un intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un K-espace vectoriel.
- L'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
- L'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}[X]$, ainsi que $\mathbb{K}_n[X]$, sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- $\{0\}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, appelé l'espace nul.
- enfin, si E et F sont des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $E\times F$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Ainsi, la plupart des ensembles usuels que l'on manipule sont des espaces vectoriels.

2) Règles de calculs

On se place ici dans un espace vectoriel E.

Proposition 11.2.

Pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E$, on a

- $\lambda.0_E = 0_E$ et $0.x = 0_E$
- $(-\lambda).x = \lambda.(-x) = -(\lambda.x)$.

- $x+(-y)=x-y$.

Théorème 11.3.

Soit $\lambda \in \mathbb{K}$, et $x \in \mathrm{E}$. Alors
$$\lambda.x = 0_{\mathrm{E}} \Leftrightarrow x = 0_{\mathrm{E}} \quad \text{ou} \quad \lambda = 0$$

3) Combinaison linéaire

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 3. — On appelle **famille de vecteurs** de E une n-liste $(e_1,\cdots,e_n)$ d'éléments de E.

Exemple 2. — Si $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}4\\-5\end{pmatrix}$, alors (A,B) désigne une famille de deux vecteurs de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition 4. — Soient $(e_1,\cdots,e_p)$ une famille de p vecteurs de E. Soit x un vecteur de E. On dit que x est une **combinaison linéaire** de la famille $(e_1,\cdots,e_p)$ s'il existe des réels $(\lambda_1,\cdots,\lambda_p)$ tels que
$$x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i = \lambda_1 e_1+\cdots+\lambda_p e_p$$
Les réels $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$ sont alors les **coefficients** de la combinaison linéaire.

Remarque 5. — Il n'y a pas forcément unicité de la combinaison linéaire.

Exemple 3. — Soient $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$. Alors, $2.\mathrm{A}-3.\mathrm{B}=\begin{pmatrix}11\\1\end{pmatrix}$ est une combinaison linéaire de A et B.

Méthode 11.1.

Pour montrer qu'un vecteur x est combinaison linéaire d'une famille $(e_1,\cdots,e_p)$, on écrit $x=\sum_{i=1}^{p}\lambda_i e_i$ et on résout un système pour déterminer (ou non) les réels $\lambda_1,\cdots,\lambda_p$.

Exemple 4. — Notons $\mathrm{A}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\mathrm{B}=\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}$. Montrer que X est combinaison linéaire de A et B.

Solution. On écrit $\mathrm{X}=\lambda\mathrm{A}+\mu\mathrm{B}$. On a alors
$$\begin{pmatrix}-5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda-3\mu\\2\lambda+\mu\end{pmatrix}$$
On résout alors le système :
$$\left\{\begin{array}{rcrcr}\lambda&-&3\mu&=&-5\\2\lambda&+&\mu&=&4\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr}\lambda&-&3\mu&=&-5\\&&7\mu&=&14\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr}\lambda&=&1\\\mu&=&2\end{array}\right.$$

Ainsi, $X = A + 2B$.

II. Sous-espace vectoriel

1) Définition

Définition 5. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit F un sous ensemble de E non vide. On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si les restrictions des lois + et $\cdot$ à F font de F un espace vectoriel.

Exemple 5. — Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

Propriété 1. — *Soit* F *un sous-espace vectoriel d'un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E. *Alors* $0_E \in F$ *et* F *est un espace vectoriel.*

Démonstration. Par définition, F est un espace vectoriel. Par propriété, si $x \in F$ (puisque F est non vide), alors $0.x \in F$ c'est-à-dire $0_E \in F$. □

Proposition 11.4.

Soit F un sous ensemble d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si

- $F \neq \emptyset$
- $\forall\ (x, y) \in F^2, x + y \in F$ (F est stable par addition)
- $\forall\ x \in F, \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x \in F$ (F est stable par multiplication par un scalaire)

Remarque 6. —

- La première propriété se vérifie en général en montrant que le neutre 0_E est dans F.
- Les deux dernières propriétés peuvent être regroupées en une seule :

$$\forall\ (x, y) \in F^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, \lambda.x + y \in F$$

Méthode 11.2.

On utilise la proposition précédente pour démontrer qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel.

Exemple 6. — Montrer que $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{C} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Solution. En effet,

- $O_{2,1} \in F$: il suffit de prendre $t = 0$.
- Si $A = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\lambda.A + B = \begin{pmatrix} \lambda a + b \\ 0 \end{pmatrix} \in F$$

en prenant $t = \lambda a + b$.

Ainsi, F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{C})$.

Théorème 11.5.

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire homogène de n équations à n inconnues. L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ forme un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ la matrice associée au système $\mathscr{S}$. Alors l'ensemble des solutions F du système $(\mathscr{S})$ s'écrit également

$$F = \left\{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C}),\ MX = 0_{n,1}\right\}$$

avec $0_{n,1} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

- $F \subset \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$.
- $0_{n,1} \in F$. En effet, $M.0_{n,1} = 0_{n,1}$ par définition de la matrice nulle.
- Soient X et Y dans F, et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors

$$M.(\lambda X + Y) = \lambda M.X + M.Y = 0_{n,1} + 0_{n,1} = 0_{n,1}$$

  puisque $MX = MY = 0_{n,1}$. Donc $\lambda X + Y \in F$.

F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. □

2) Sous-espaces engendrés

On se donne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Définition 6. — Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **sous-espace vectoriel engendré par** $(e_1, \cdots, e_p)$, et on note $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$, l'ensemble formé de toutes les combinaisons linéaires de $(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi,

$$x \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \Longleftrightarrow \exists\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p,\ \ x = \lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_p.e_p$$

Exemple 7. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors

$$\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda.A,\ \lambda \in \mathbb{R}\} = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Vect(A) est appelée **droite vectorielle**, car engendré par un seul vecteur non nul.

Théorème 11.6.

Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. Alors $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ est un sous-espace vectoriel de E.

Propriété 2. — *Soit* $(e_1, \cdots, e_p)$ *une famille de vecteurs de* E. *Alors*

- $\forall\ k \in [\![1, p]\!], e_k \in \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$
- $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$ *est le plus petit sous-espace vectoriel contenant la famille* $(e_1, \cdots, e_p)$. *Ainsi, si* F *est un sous-espace vectoriel contenant* $(e_1, \cdots, e_p)$, *nécessairement,* $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) \subset F$.
- *Si* $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p, e_{p+1})$ *et si* e_{p+1} *est combinaison linéaire des vecteurs* $e_1, \cdots, e_p$, *alors* $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.
- *Si* $(a_1, \cdots, a_p)$ *sont des réels tous non nuls, et si* $F = \mathrm{Vect}(a_1 e_1, \cdots, a_p e_p)$, *alors* $F = \mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$.

Exemple 8. —

- Soit $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Vect}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right)$.
- Soient $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Alors $\mathrm{Vect}(A, B, C) = \mathrm{Vect}(A, B)$ puisque $C = A + B$.
- Soit F un sous-espace vectoriel contenant les vecteurs A et B précédents. Alors, nécessairement, $\mathrm{Vect}(A, B) \subset F$.

3) Intersection de sous-espaces vectoriels

Proposition 11.7.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors l'intersection de F et G, $F \cap G$, est également un sous-espace vectoriel de F.

Démonstration. Puisque F et G sont deux sous-espaces vectoriels, ils contiennent 0_E. Ainsi, $0_E \in F \cap G$. Enfin, soient u et v deux éléments de $F \cap G$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

- Comme u et v sont dans $F \cap G$, ils sont tous les deux dans F. Puisque F est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + v \in F$.
- De même, u et v sont dans G et comme G est un sous-espace vectoriel de E, $\lambda u + v \in G$.

Ainsi, $\lambda u + v \in F \cap G$: $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E. □

4) Somme de sous-espaces vectoriels

Définition 7. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On appelle **somme** de F et G, et on note $F + G$ l'ensemble

$$F + G = \{u + v, \quad u \in F, \quad v \in G\}$$

Ainsi, un élément de $F + G$ est la somme d'un élément de F et d'un élément de G.

Exemple 9. — On a par exemple $\mathbb{K}u_1 + \mathbb{K}u_2 = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$, en notant $\mathbb{K}u_1$ la droite vectorielle engendrée par u_1.

Proposition 11.8.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors, $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Tout d'abord, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, 0_E appartient à F et G. Mais alors $0_E + O_E \in F + G$, et donc $0_E \in F + G$.
Soient ensuite u et v deux éléments de $F + G$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. On écrit $u = u_F + u_G$ et $v = v_F + v_G$, avec $(u_F, v_F) \in F^2$ et $(u_G, v_G) \in G^2$. Mais alors, puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E :

$$\lambda u + v = \lambda(u_F + u_G) + (v_F + v_G) = \underbrace{(\lambda u_F + v_F)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda u_G + v_G)}_{\in G} \in F + G$$

Ainsi, $\lambda u + v \in F + G$: $F + G$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Remarque 7. — De manière générale, si $u \in F + G$, u peut avoir plusieurs écritures sous la forme $f + g$, avec $f \in F$ et $g \in G$: il n'y a pas forcément unicité.

Définition 8. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- On dit que la somme $F+G$ est **directe** si pour tout $u \in F+G$, il existe un unique couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$. Dans ce cas, on notera la somme $F \bigoplus G$ au lieu de $F + G$.
- On dit que F et G sont **supplémentaires** s'ils sont en somme directe, et que leur somme donne l'espace E tout entier, c'est-à-dire
$$F \bigoplus G = E$$

Remarque 8. — Ainsi, deux espaces F et G sont supplémentaires si tout élément de E s'écrit de manière unique $f + g$ avec $f \in F$ et $g \in G$.

Proposition 11.9.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

- $F + G$ est directe si et seulement si $F \cap G = \{0\}$.
- F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$.

Démonstration. Seul le premier point est à démontrer (le deuxième étant une conséquence du premier).
• Supposons $F \cap G = \{0\}$. Soit u un élément de $F + G$, et deux décompositions $u = f_1 + g_1 = f_2 + g_2$, avec $(f_1, f_2) \in F^2$ et $(g_1, g_2) \in G^2$. Mais alors

$$u - u = (f_1 + g_1) - (f_2 + g_2) = (f_1 - f_2) + (g_1 - g_2) = 0$$

et donc $f_1 - f_2 = g_2 - g_1$. Or, $f_1 - f_2 \in F$ et $g_2 - g_1 \in G$. Puisqu'ils sont égaux, on en déduit que $f_1 - f_2 \in F \cap G$ et $g_2 - g_1 \in F \cap G$, c'est-à-dire $f_1 - f_2 = 0$ et $g_2 - g_1 = 0$: ainsi, $f_1 = f_2$ et $g_1 = g_2$ et la décomposition est unique.
• Réciproquement, supposons la somme directe. Soit $w \in F \cap G$. Remarquons qu'on peut écrit $w = w + 0 = 0 + w$ puisque $w \in F$ et $w \in G$. Par unicité de la décomposition, on en déduit que $w = 0$: ainsi, $F + G = \{0\}$.

□

Méthode 11.3.

Pour montrer qu'une somme $F + G$ est directe, on montre que $F \cap G = \{0\}$. Pour montrer que $F \bigoplus G = E$, on vérifie que $F \cap G = \{0\}$, et que pour tout élément $u \in E$, il existe au moins un couple $(f, g) \in F \times G$ tel que $u = f + g$. On raisonne alors par analyse et synthèse : on suppose l'existence de la décomposition, que l'on trouve (analyse). On vérifie ensuite qu'elle convient (synthèse)

Exemple 10. — Soient $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{K} \right\}$ et $G = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{K} \right\}$. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$, puis que $F \bigoplus G = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

Solution.

- **Somme directe** : Soit $u \in F \cap G$. Il existe donc $(t, t') \in \mathbb{K}^2$ tels que $u = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix}$. Mais alors,

$$\begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix} \Leftrightarrow t = t' = 0$$

  Ainsi, $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $F \cap G = \{0\}$: la somme est directe.

- **Analyse** : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. On cherche t et t' tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t' \\ t' \end{pmatrix}$$

  soit $t' = y$ et $t = x - y$.

  Synthèse : soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$. On constate que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} x-y \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in F} + \underbrace{\begin{pmatrix} y \\ y \end{pmatrix}}_{\in G}$$

  Ainsi, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in F + G$.

Bilan : F et G sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K})$.

III. Base d'un espace vectoriel

1) Définition

Définition 9. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.
On dit que $\mathscr{B}$ est une **base** de E si, pour tout vecteur x de E, il existe une *unique* n-liste $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ de réels tels que

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$$

Les réels $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont appelés les **coordonnées** de x dans la base $\mathscr{B}$

Exemple 11. — Si $F = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}$, alors tout élément de F s'écrit de manière unique sous la forme

$t.\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ainsi, la famille composée du vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de F.

Méthode 11.4.

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base d'un espace vectoriel E, on prend $x \in E$ et on résout $\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = x$. S'il existe une unique solution, alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est bien une base de E.

Exemple 12. — Montrer que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution. Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un élément de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche a et b tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a+b \\ 2a+3b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

On résout le système

$$\begin{cases} a + b = x \\ 2a + 3b = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = x \\ b = y - 2x \end{cases}$$

Le système est de Cramer, donc il possède une unique solution.

Bilan : la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ est bien une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Définition 10. — Soit E un espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E.

- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **libre** si

$$\lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_p e_p = 0_E \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$$

  Si elle n'est pas libre, on dit qu'elle est **liée**.
- On dit que la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est **génératrice** si $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) = E$.

Méthode 11.5.

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = 0_E$ et on résout le système. S'il admet comme seule solution $(0, \cdots, 0)$ alors elle est libre, sinon elle est liée.

Exemple 13. — Montrer que la famille $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est libre.

Solution. On cherche a et b deux réels tels que

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{pmatrix} a+2b \\ a+b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient alors $a=0$ puis $b=0$. Ainsi, la famille est libre.

Méthode 11.6.

Pour montrer qu'une famille $(e_1, \cdots, e_p)$ est génératrice, on écrit $\lambda_1 e_1 + \cdots \lambda_p e_p = x$ avec $x \in \mathrm{E}$ et on résout le système. S'il admet au moins une solution alors elle est génératrice, sinon elle ne l'est pas et on exhibe alors un contre-exemple.

Remarque 9. —

- Une famille libre est une famille dans laquelle aucun vecteur ne peut être exprimé comme combinaison linéaire des autres vecteurs. Ainsi, tout vecteur est "utile" dans la famille.
- Une famille génératrice est une famille qui permet de récupérer, par combinaison linéaire, tout vecteur de E; en revanche, plusieurs combinaisons linéaires peuvent mener au même vecteur : il n'y a pas forcément unicité de la décomposition.

Théorème 11.10.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. $(e_1, \cdots, e_p)$ est une base si et seulement si elle est libre et génératrice.

Méthode 11.7.

Pour montrer qu'une famille est une base, il peut ainsi être judicieux de montrer d'une part qu'elle est libre, et d'autre part qu'elle est génératrice.

2) Base canonique des espaces vectoriels usuels

Remarque 10. — On s'intéresse à $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Toute matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$\mathrm{A} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + a_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, les trois matrices $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ permettent de décrire toutes les matrices de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$: (e_1, e_2, e_3) représente une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Définition 11. — Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, ..., $e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ des matrices de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Toute matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ peut s'écrire de manière unique sous la forme

$$a_1.e_1 + \cdots + a_n.e_n$$

où $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. La famille de vecteurs $(e_1, \cdots, e_n)$ forme une **base**, appelée **base canonique** de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Remarque 11. — Il n'y a pas unicité de la base. Par exemple, dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les vecteurs $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ forment également une base.

Définition 12. — On verra plus tard que toute base (finie) d'un espace vectoriel possède le même nombre d'éléments : ainsi, dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, les bases possèdent 2 vecteurs. On appelle ce nombre la **dimension** de l'espace vectoriel, et on le notera $\dim(E)$.

Exemple 14. — $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est de dimension 2, et plus généralement $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est de dimension n.

Méthode 11.8.

Pour déterminer la dimension d'un espace vectoriel, on détermine d'abord une base, et on conclut.

Exemple 15. — Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ x + y = 0 \right\}$. Déterminer la dimension de F.

Solution. Remarquons qu'on peut écrire

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ y = -x \right\}$$

soit

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -x \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

Ainsi,

$$F = \left\{ x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

et donc $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de F :

$$F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

et $\dim(F) = 1$.

Proposition 11.11.

On dispose des bases canoniques suivantes :

- La famille $(1, X, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n + 1$.
- La famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ est une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, avec $E_{i,j}$ la matrice nulle sauf le coefficient en

ligne i colonne j qui vaut 1. Ainsi, $\dim\left(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})\right) = n \times p$.

Démonstration. La démonstration se fait aisément, en utilisant les propriétés connues sur les matrices et les polynômes. □

Remarque 12. — Pour les polynômes, on dispose d'un résultat plus général. Si $(P_0, \cdots, P_n)$ est une famille de polynômes **échelonnés en degré**, c'est-à-dire tels que $\deg(P_i) = i$, alors la famille $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

IV. Applications linéaires

1) Définition

Définition 13. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. On appelle **application linéaire** de E dans F toute application $f : E \to F$ telle que

- $\forall\ (x, y) \in E^2, f(x + y) = f(x) + f(y)$
- $\forall\ x \in E, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x) = \lambda f(x)$

Remarque 13. — On peut réunir les deux propriétés en une seule : $f : E \to F$ est une application linéaire si et seulement si

$$\forall\ (x, y) \in E^2, \forall\ \lambda \in \mathbb{K}, f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$$

Méthode 11.9.

Pour montrer qu'une application f est une application linéaire, on prendra x et y dans E, $\lambda \in \mathbb{K}$, et on montre que $f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y)$.

Exemple 16. — Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} b \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$$

Montrer que f est une application linéaire.

Solution. En effet, si $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors

$$f(\lambda A + B) = f\left(\begin{pmatrix} \lambda a_1 + b_1 \\ \lambda a_2 + b_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B}) = \lambda \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_2 \\ 0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_2 + b_2 \\ 0 \\ \lambda a_1 + b_1 \end{pmatrix}$$

Donc $f(\lambda\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \lambda f(\mathrm{A}) + f(\mathrm{B})$: f est une application linéaire

Notation 1. — L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$.

Définition 14. —

- Si $\mathrm{F}=\mathrm{E}$, et si $f : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ est une application linéaire, on dit que f est un **endomorphisme**.
- Si $\mathrm{F}=\mathbb{R}$, et si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{R})$, on dit que f est une **forme linéaire**.

Exemple 17. — L'application $\mathrm{id}_\mathrm{E} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par $id_\mathrm{E} : x \mapsto x$ est un endomorphisme de E.

Propriété 3. — *Soient* E *et* F *deux* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels, et* $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ *une application linéaire. Alors* $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$.

Proposition 11.12.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors $g \circ f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{G})$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors, en utilisant respectivement la linéarité de f puis de g :

$$g \circ f(\lambda x + y) = g(f(\lambda x + y)) = g(\lambda f(x) + f(y)) = \lambda g(f(x)) + g(f(y)) = \lambda g \circ f(x) + g \circ f(y)$$

□

2) Noyau d'une application linéaire

Définition 15. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle **noyau** de f, et on note $\mathrm{Ker} f$, le sous-ensemble de E défini par

$$\mathrm{Ker} f = \left\{x \in \mathrm{E},\ f(x) = 0_\mathrm{F}\right\}$$

Théorème 11.13.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Alors $\mathrm{Ker} f$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration. Puisque $f(0_\mathrm{E}) = 0_\mathrm{F}$, on a déjà $0_\mathrm{E} \in \mathrm{Ker} f$. Ensuite, si x et y sont deux vecteurs de $\mathrm{Ker} f$, et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{x \text{ et } y \text{ dans } \ker f} \lambda 0_\mathrm{F} + 0_\mathrm{F} = 0_\mathrm{F}$$

donc $\lambda x + y \in \mathrm{Ker} f$: $\mathrm{Ker} f$ est bien un sous-espace vectoriel de E. □

Méthode 11.10.

Pour déterminer le noyau d'une application linéaire, on résout l'équation $f(x) = 0_F$ d'inconnue x. On se ramène en général à un système.

Exemple 18. — Déterminer le noyau de l'application linéaire précédente.

Solution. Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$ si et seulement si

$$f(X) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui donne le système

$$\begin{cases} x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 &= 0 \\ x_1 &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow X = 0_E$$

Donc, $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Théorème 11.14.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. f est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.

Démonstration. Supposons f injective. Soit x tel que $f(x) = 0_F$ alors $f(x) = f(0_E)$. Par injectivité de f, $x = 0_E$. Donc $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$.
Réciproquement, supposons que $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$. Soient x et x' tels que $f(x) = f(x')$. Par linéarité de f, $f(x - x') = 0_F$. Puisque $\operatorname{Ker} f = \{0_E\}$, alors $x - x' = 0_E$ c'est-à-dire $x = x'$: f est injective. □

3) Image d'une application linéaire

Définition 16. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. On appelle **image** de f, et on note $\operatorname{Im} f$, le sous-ensemble de F défini par

$$\operatorname{Im} f = \{y \in F, \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$$

Théorème 11.15.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $\operatorname{Im} f$ est un sous-espace vectoriel de F. Si $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(f(e_1), \cdots, f(e_n))$$

Démonstration. Puisque $O_F = f(0_E)$, on a $O_F \in \operatorname{Im} f$. Soient a et b deux éléments de $\operatorname{Im} f$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque a et b sont dans $\operatorname{Im} f$, il existe x et y dans E tels que

$$a = f(x) \quad \text{et} \quad b = f(y)$$

Mais alors

$$\lambda a + b = \lambda f(x) + f(y) \underbrace{=}_{\text{linéarité de } f} f(\lambda x + y)$$

Donc $\lambda a + b$ s'écrit $f(z)$ pour un certain $z \in \mathrm{E}$: $\lambda a + b \in \mathrm{Im}\, f$. $\mathrm{Im}\, f$ est donc bien un sous-espace vectoriel de F. □

Méthode 11.11.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on prend une base (par exemple, la base canonique) si possible et on déterminer l'image par f de cette base. On vérifie alors si la famille obtenue est libre. Si oui, c'est l'image, sinon, un vecteur est en trop. On l'enlève, et on réitère.

Exemple 19. — Déterminer l'image de l'application linéaire précédente.

Solution. Si $f\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_2 \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix}$, on prend $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On a donc $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}(f(e_1), f(e_2))$.

$$f(e_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f(e_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La famille $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Donc

$$\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \left\{\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}\right\}$$

et $\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ forme une base de $\mathrm{Im}\, f$. Ainsi, $\mathrm{rg}(f) = 2$.

Théorème 11.16.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{F}$.

Démonstration. Par définition, f est surjective si et seulement si $f(\mathrm{E}) = \mathrm{F}$. Or, par définition, $f(\mathrm{E}) = \mathrm{Im}\, f$. Donc f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{F}$. □

Théorème 11.17.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f est bijective si et seulement si $\mathrm{Ker} f = \{0_\mathrm{E}\}$ et $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{F}$.

Méthode 11.12.

Pour montrer qu'une application linéaire $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est bijective, on montrera que $\mathrm{Ker} f = \{0_\mathrm{E}\}$ et que

Im f = F.

Exemple 20. — Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

est bijective.

Solution. f est bien linéaire (c'est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminons noyau et image.

- Soit $\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} f$. Alors

$$f(\mathrm{X}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = y = 0$$

  ainsi, $\operatorname{Ker} f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$ et f est injective.

- Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Alors,

$$f(e_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2 \quad \text{et} \quad f(e_2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2e_1$$

  La famille $(2e_1, e_2)$ est libre (car les vecteurs ne sont pas colinéaires) donc forme une base de Im f :

$$\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(2e_1, e_2) = \operatorname{Vect}(e_1, e_2) = \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$$

  Ainsi, f est surjective.

Bilan : f est bien bijective.

Remarque 14. — On verra ultérieurement qu'en dimension finie, on dispose d'une propriété permettant d'être plus rapide pour démontrer qu'une application linéaire est bijective.

Définition 17. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

- Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est bijective, on dit que f est un **isomorphisme** de E dans F.
- Si $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ est bijective, on dit que f est un **automorphisme**.
- On note $\mathrm{I}som(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ l'ensemble des isomorphismes de E dans F, et $\mathrm{A}ut(\mathrm{E})$ ou GL(E) l'ensemble des automorphismes de E.

Théorème 11.18.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, et $f \in \mathrm{I}som(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. Alors f^{-1} est également une application linéaire et $f^{-1} \in \mathrm{I}som(\mathrm{F}, \mathrm{E})$.

Démonstration. Soient x, y deux éléments de F et λ un élément de $\mathbb{K}$. Puisque f est bijective, il existe un unique $a \in \mathrm{E}$ tel que $f(a) = x$ et un unique $b \in \mathrm{E}$ tel que $f(b) = y$. Donc $f(\lambda a + b) = \lambda f(a) + f(b) = \lambda x + y$ donc, par unicité de bijectivité de f, $\lambda a + b = f^{-1}(\lambda f(a) + f(b))$, c'est-à-dire

$$\lambda f^{-1}(x) + f^{-1}(y) = f^{-1}(\lambda x + y)$$

f^{-1} est bien linéaire. $\square$

Exercices

Sous-espaces vectoriels

Exercice 1. — Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, 2x + 3y = 0 \right\}$
3. $F_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, x^2 + y = 0 \right\}$

Exercice 2. — Déterminer si les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $F_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R} \right\}$
2. $F_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, x + y = 0 \text{ et } x - y - 2z = 0 \right\}$

Exercice 3. — On se donne $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. On note

$$E = \left\{ M \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), AM = 0 \right\} \text{ et } F = \left\{ M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = MA \right\}$$

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et que F un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 4. — Montrer que les espaces suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. $E = \left\{ f \in \mathscr{F}, \quad f(0) = 0 \right\}$.
2. $F = \left\{ f \in \mathscr{F}, \quad \exists\, (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = a\mathrm{e}^x + b \right\}$.

Exercice 5. — On note $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\mathscr{P} = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \text{ paire} \right\}$ et $\mathscr{I} = \left\{ f \in \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \quad f \text{ impaire} \right\}$.

1. Montrer que $\mathscr{P} + \mathscr{I}$ est directe.
2. En raisonnant par analyse et synthèse, montrer que

$$\mathscr{P} \bigoplus \mathscr{I} = \mathscr{F}$$

> **Remarque 15.** — Rappel : la méthode par analyse et synthèse consiste à partir du résultat : pour $f \in \mathscr{F}$ fixé, il existe $p \in \mathscr{P}$ et $i \in \mathscr{I}$ tel que $f = p + i$ et on cherche à exprimer p et i en fonction de f (*analyse*). On vérifie ensuite que les fonctions p et i obtenues vérifient bien les conditions demandées (*synthèse*).

Exercice 6. — Montrer que les espaces suivants sont des sous-espace vectoriels d'espaces vectoriels usuels :

1. $E = \{P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P(1) = 0\}$.
2. $F = \{P \in \mathbb{R}[X], \quad P(-X) = P(X)\}$.

Espace vectoriel engendré

Exercice 7. — On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix}$ sont des combinaisons linéaires de e_1 et e_2. Déterminer $\mathrm{Vect}(e_1, e_2)$.

Exercice 8. — On note $u = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $w = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{Vect}(u, v) = \mathrm{Vect}(w, x)$.

Méthode 11.13.

Pour montrer une égalité d'espace avec des sous-espaces vectoriels, on procède par double inclusion : si $E \subset F$ et $F \subset E$ alors $E = F$.
Enfin, rappelons que si $(e_1, \cdots e_n) \in F^n$, alors $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) \subset F$, qui va nous servir ici.

Famille libre, base

Exercice 9. — On note $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$. Montrer que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 10. — La famille (e_1, e_2, e_3) de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est-elle libre, où

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} ?$$

Exercice 11. — Déterminer une base des sous-espaces vectoriels des exercices 1 et 2, ainsi que leur dimension.

Applications linéaires

Exercice 12. — Les applications suivantes sont-elles linéaires ? Si oui, le démontrer rigoureusement.

1. $f_1 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f_1\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

2. $f_2 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2 + x_3 \end{pmatrix}$$

3. $f_3 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f_3\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_2 - x_3 \\ x_3 - x_1 \end{pmatrix}$$

4. $f_4 : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_4\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

Noyaux, images

Exercice 13. — Soit f un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, dont les images des vecteurs de la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ sont respectivement $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les antécédents de $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. f est-elle injective ? surjective ?
2. Déterminer une base du noyau, et de l'image de f.

Exercice 14. — Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ 2x + y - 3z \\ 3x + 2y - 4z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.
3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur un chapitre ultérieur, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Exercice 15. — Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ définie par

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y - z \\ y - z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau, et l'image de f.

3. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
4. En anticipant sur un chapitre ultérieur, montrer que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$.

Exercice 16. — Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $f : \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ définie par $f(A) = AM - MA$. Montrer que f est une application linéaire, et déterminer image et noyau.

Exercice 17 (Important)**.** — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f : P \mapsto P'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 18. — Montrer que l'application $f : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ définie par $f : P \mapsto P(a)$ (avec $a \in \mathbb{R}$) est une forme linéaire. Déterminer son noyau.

Exercice 19 (Matrices symétriques et antisymétriques)**.** — On rappelle qu'on note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n symétriques, et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n anti-symétriques. On définit $f : \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$f : A \mapsto \frac{A + {}^tA}{2}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme.
2. Montrer que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$, $f(A) = A$. En déduire que $\mathrm{Im}\, f = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
3. Déterminer $\mathrm{Ker} f$.
4. Justifier que $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
5. Démontrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \bigoplus \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$. On pourra utiliser ce qui précède, ou procéder par analyse et synthèse