CHAPITRE 12

LIMITES ET CONTINUITÉ

Résumé

On étend dans ce chapitre la notion de limite de suite au cas plus général des limites de fonctions. Cela permettra de commencer les études de fonctions, en étudiant le comportement asymptotique de celles-ci. On définit rigoureusement la notion déjà vue de continuité. C'est l'occasion de revoir le théorème des valeurs intermédiaires, et un corollaire important - le théorème de la bijection.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition des limites :
- Connaître les limites usuelles et les croissances comparées . . . . □
- Savoir utiliser les théorèmes d'addition, multiplication, quotient de limites . . . . . . □
- Savoir calculer la limite d'une composée de fonction . . . . □
- Reconnaître les limites liées au taux d'accroissement . . . . □

② Savoir lever les indéterminations classiques :
- polynômes et fractions rationnelles . . . . □
- fonctions avec des radicaux . . . . □
- les cas "∞/∞" ou "$0/0$" . . . . □

③ Savoir appliquer les théorèmes d'existence de limites (théorème d'encadrement, de comparaison) □

④ Savoir déterminer le comportement asymptotique d'une fonction (limites, asymptotes) . . . . . . □

⑤ Concernant la continuité :
- Savoir montrer qu'une fonction est continue en un point . . . . □
- Savoir prolonger de manière continue une fonction en un point . . . . □
- Savoir utiliser la continuité pour déterminer la limite d'une suite récurrente . . . . . . □

⑥ Savoir utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour déterminer l'existence d'une solution à une équation du type $f(x) = a$ . . . . □

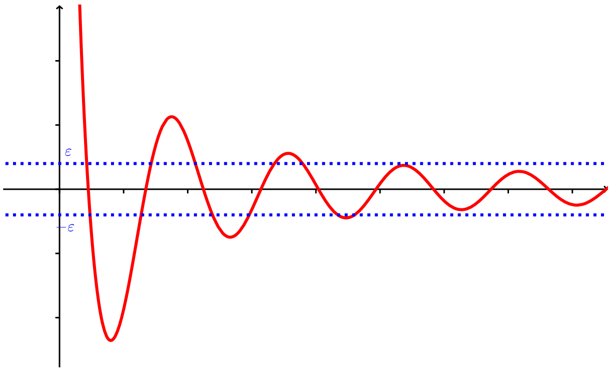
⑦ Savoir utiliser le théorème de la bijection pour montrer qu'une fonction est bijective, et étudier le sens de variations d'une fonction réciproque . . . . □

I. Limites à l'infini

1) Limites nulles

Définition 1. — Si, pour tout $\varepsilon > 0$ (aussi petit qu'on veut), la fonction f est comprise entre $-\varepsilon$ et $+\varepsilon$ (soit $|f(x)| \leqslant \varepsilon$) lorsque x est suffisamment grand , on dit que f **a pour limite 0** quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = 0$$



Remarque 1. — Mathématiquement, on écrit donc

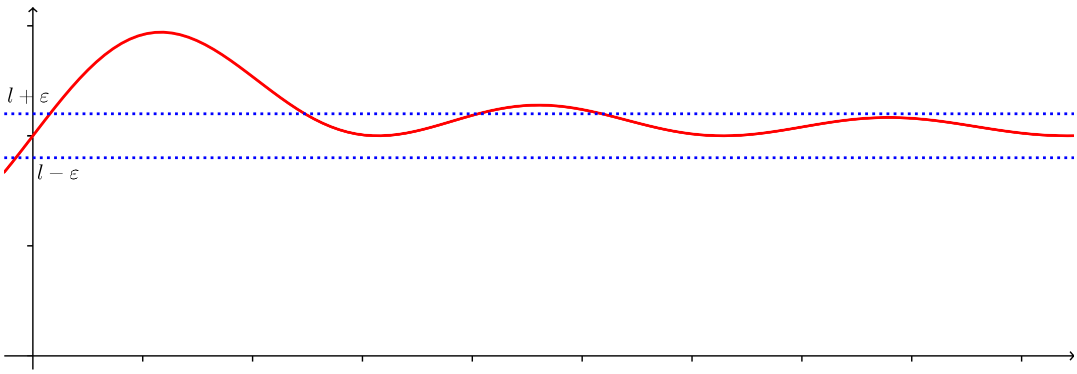
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, M,\ \forall\, x, x > M \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

Remarque 2. — On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$

Exemple 1. — $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2) Limites finies : $l \in \mathbb{R}$

Définition 2. — Soit $l \in \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction f **a pour limite l** quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) si $f(x) - l$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$).



Remarque 3. — Mathématiquement, on écrit donc

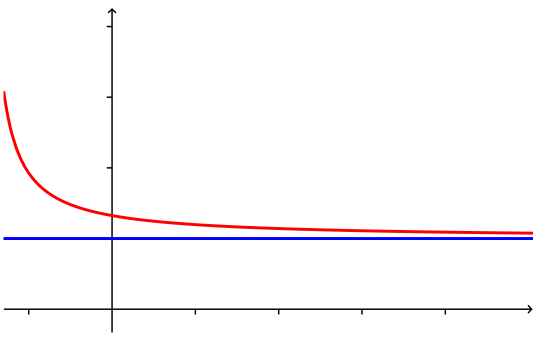
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \mathrm{M},\ \forall\, x, x > \mathrm{M} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Cette définition rigoureuse est due à **Karl Weierstrass**, considéré comme le “père de l'analyse moderne”, même si **Bernard Bolzano** avait déjà défini la notion de limite, certes de manière moins rigoureuse.

Exemple 2. — $\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

Définition 3. — *(Asymptote horizontale)* Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = l$ (où $l \in \mathbb{R}$). Alors, la droite d'équation $y = l$ est appelée **asymptote horizontale** à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ (même chose en $-\infty$).



On dispose ici d'une asymptote horizontale d'équation $y = l$.

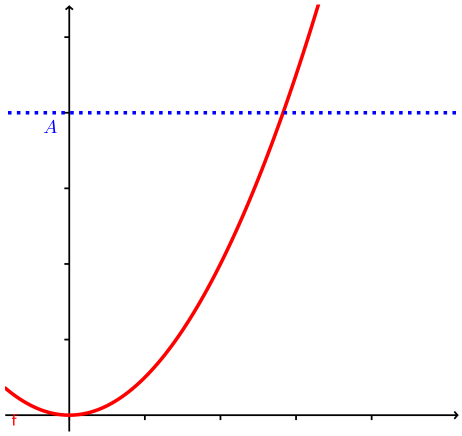
Remarque 4. — Pour étudier la position de la courbe de f par rapport à l'asymptote $y = l$, on étudie le signe de $f(x) - l$.

- Si $f(x) - l \geqslant 0$, la courbe est au-dessus de son asymptote.
- Si $f(x) - l \leqslant 0$, la courbe est en dessous de son asymptote.

3) Limites infinies

Définition 4. — Si, pour tout nombre A (aussi grand qu'on veut), la fonction f est toujours supérieure ou égale à A dès que x est suffisamment grand, on dit que ***f* a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$. On note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{+\infty} f = +\infty$$



Remarque 5. — Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall \mathrm{A} > 0,\ \exists \mathrm{M},\ \forall x, x > \mathrm{M} \Rightarrow f(x) > \mathrm{A}$$

Remarque 6. — On définit de même $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

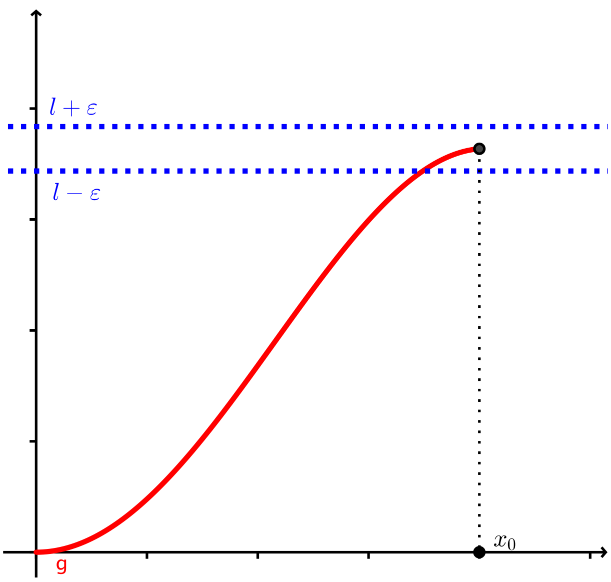
II. Limites en $a \in \mathbb{R}$

Ici, on s'intéresse au comportement d'une fonction f quand x tend vers $a \in \mathbb{R}$.

1) Limite réelle en un point

Définition 5. — Soient x_0 et l deux réels.
Si $f(x)$ est aussi proche que l'on veut de l dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite l** quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = l$$



Remarque 7. — Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Remarque 8. — Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.

Exemple 3. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x+1$. Soit $x_0 = 2$. Montrer que, quand x tend vers x_0, $f(x)$ va tendre vers $5 = f(2)$.

Solution. On peut le démontrer rigoureusement :

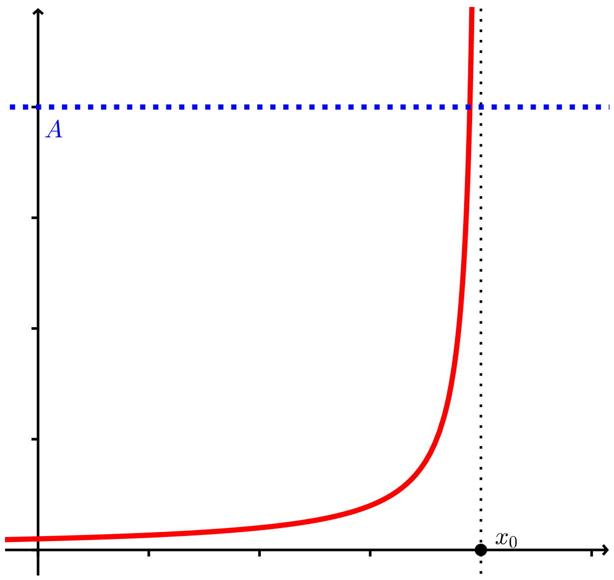
$$|f(x) - 5| = |2x + 1 - 5| = |2x - 4| = 2|x - 2|$$

Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Alors $|f(x) - 5| < \varepsilon \Leftrightarrow 2|x - 2| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\varepsilon}{2}$. On pose alors $\alpha = \frac{\varepsilon}{2}$.

2) Limite infinie en un point

Définition 6. — Soit x_0 un réel.
Si $f(x)$ est aussi grand que l'on veut dès lors que x est proche de x_0, on dit que f **a pour limite** $+\infty$ quand x tend vers x_0. On note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x_0} f = +\infty$$



Remarque 9. — Mathématiquement, on écrit donc

$$\forall\, \mathrm{A} > 0,\ \exists\, \alpha > 0,\ \forall\, x, |x - x_0| < \alpha \Rightarrow f(x) > \mathrm{A}$$

Remarque 10. — Il y a unicité de la limite. On peut donc bien parler de la limite en x_0.
On définit également $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$ de la même manière.

3) Limite à gauche et à droite

Définition 7. — Soit x_0 un réel.

- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x < x_0$, on parle de la **limite à gauche** en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^-}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}$.
- Si on s'intéresse à la limite en x_0, en imposant $x > x_0$, on parle de la **limite à droite** en x_0, et on note $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ou $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}$.

Remarque 11. — Une fonction peut avoir des limites à gauche et à droite en x_0 différentes! Par exemple

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

Proposition 12.1.

Soit f une fonction et x_0 un réel. Alors f admet une limite en x_0 si et seulement si f admet des limites à gauche et à droite en x_0 et que ces limites sont les mêmes.
Dans ce cas,

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x)$$

Exemple 4. — Ainsi, la fonction inverse n'admet pas de limite en 0.

Méthode 12.1.

On est souvent amené à étudier des limites à droite et à gauche lorsque la fonction est définie de deux manières différentes selon les intervalles.

Exemple 5. — Etudier la limite en 0 de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

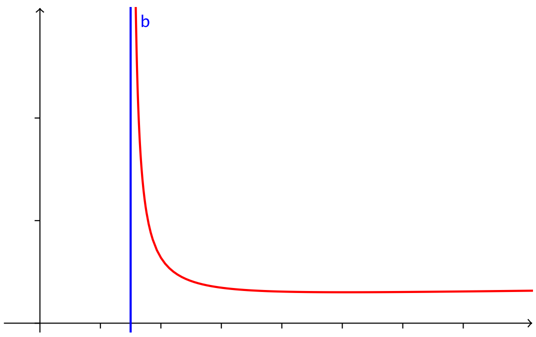
$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geqslant 0 \\ e^x \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Solution. On remarque que :

- $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} 1 = 1 = f(0)$
- $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1$

Puisque les limites à droite et à gauche sont égales, on en déduit que f admet une limite en 0, et $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Définition 8. — *(Asymptote verticale)*
Si $\lim\limits_{x\to a^+(\text{ou } a^-)} f(x) = +\infty$ (ou $-\infty$), on dit que la droite d'équation $x = a$ est une **asymptote verticale** à la courbe de f.



III. Théorèmes d'existence et de comparaison

1) Fonctions monotones

Les fonctions monotones possèdent des propriétés intéressantes concernant les limites :

Théorème 12.2.

Soit f une fonction monotone sur un segment $[a;b]$. Alors f admet des limites à gauche et à droite en tout point.

Théorème 12.3.

Soit f une fonction monotone sur $\mathrm{I} =]a;b[$.

- Si f est croissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est croissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.
- Si f est décroissante et minorée sur I, alors f admet une limite finie en b^-.
- Si f est décroissante et majorée sur I, alors f admet une limite finie en a^+.

Remarque 12. — Si f est croissante sur $\mathrm{I} =]a;b[$ mais non majorée sur I, alors f admet une limite en b^- qui vaut $+\infty$.
De manière générale, une fonction monotone sur $]a;b[$ admet toujours des limites en a^+ et en b^-, finie ou infinie.

2) Limites et inégalités

Théorème 12.4.

Soit I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soient f et g deux fonctions définies sur I, sauf éventuellement en x_0, mais possédant une limite en x_0. Alors, si pour tout x de $\mathrm{I}\setminus\{x_0\}$, $f(x) \geqslant g(x)$, on a

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim_{x\to x_0} g(x)$$

En particulier, si $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim_{x\to x_0} f(x) \geqslant 0$.

Remarque 13. — Attention : le passage à la limite ne conserve pas les inégalités strictes. Si $f(x) > g(x)$ pour tout $x \neq x_0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \geqslant \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$. Par exemple, pour tout x, $1+\frac{1}{x} > 1$ mais $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} \geqslant 1$.

3) Théorème d'encadrement

Théorème 12.5.

Soit I un intervalle et $x_0 \in \mathrm{I}$. Soient f, g, h trois fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout x de $\mathrm{I}\backslash\{x_0\}$, on a $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ et si f et h ont la même limite l en x_0, alors la limite de g en x_0 existe, et

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = l$$

Démonstration. Admis. Idée de démonstration dans le chapitre sur les suites. □

Exemple 6. — Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = \frac{[x]}{x}$. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$.

Solution. On a, pour tout x de $]0;+\infty[$, $x-1 \leqslant [x] \leqslant x$, donc, en divisant par $x > 0$,

$$\frac{x-1}{x} \leqslant g(x) \leqslant \frac{x}{x} = 1$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1$, on en déduit donc, par encadrement, que la limite de g en $+\infty$ existe, et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]}{x} = 1$$

Exercice 1. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Solution. Par le même raisonnement, pour tout $x > 0$, on a

$$-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1 \quad \text{donc } -\tfrac{1}{x} \leqslant \tfrac{\sin(x)}{x} \leqslant \tfrac{1}{x} \text{ (car } x > 0)$$

Puisque on a $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, par encadrement, on en déduit que la limite $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x}$ existe et

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$$

Théorème 12.6.

Soit I un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ et l un réel. Soient f et g deux fonctions définies sur I sauf éventuellement en x_0. Si, pour tout réel $x \in \mathrm{I}\backslash\{x_0\}$ on a $|f(x) - l| \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

Démonstration. C'est une conséquence directe du théorème d'encadrement. Voir le chapitre sur les suites. □

4) Comparaison à l'infini

Théorème 12.7.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathrm{I} =]a;+\infty[$. Si pour tout x de I :

- $f(x) \geqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
- $f(x) \leqslant g(x)$ **et si** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Démonstration. Soit M un réel. Par définition, à partir d'un certain réel b, on a $g(x) > \mathrm{M}$. Or $f(x) \geqslant g(x)$, donc $f(x) > \mathrm{M}$ pour tout $x \geqslant b$: par définition, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. □

Exemple 7. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{[x]+1}{\sqrt{x}}$.

Solution. Pour tout réel x, on a $[x] \leqslant x \leqslant [x]+1$. Ainsi, pour tout réel $x > 0$ (puisque $\sqrt{x} > 0$) on a

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

soit

$$\sqrt{x} \leqslant \frac{[x]+1}{\sqrt{x}}$$

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$, par comparaison,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{[x]+1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

5) Asymptote oblique

Définition 9. — *(Asymptote oblique)* Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f dans un repère donné. Soit (d) une droite d'équation $y = ax+b$ $(a \neq 0)$. On dit que la droite (d) est une **asymptote oblique** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de $+\infty$ si

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$$

Exemple 8. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$. Montrer que la droite d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

Solution. En effet, pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$,

$$f(x) - x = \frac{x^2+1}{x} - x = \frac{1}{x}$$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi la droite d'équation $y = x$ est bien asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

IV. Opérations sur les limites et limites usuelles

1) Opérations sur les limites

On suppose connues les limites de deux fonctions f et g.

a) Limite de $f+g$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
l'	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exemple 9. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}) = +\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x}) = +\infty$.

b) Limite de $f\times g$

$\lim g$ / $\lim f$	$l\neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$l.l'$	signe(l').∞	-signe(l').∞
$+\infty$	signe(l).∞	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe(l).∞	$-\infty$	$+\infty$

Remarque 14. — Si $l=0$ (et/ou $l'=0$), seul le résultat $\lim(fg) = l.l' = 0$ est déterminé. Toutes les autres limites (du type "$0\times\infty$") sont **indéterminées**.

Exemple 10. —

$$\lim_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} 3xe^x = 0$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} x = \lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x} = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x\sqrt{x}) = +\infty$.
De même, $\lim\limits_{x\to 0} 3x = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} e^x = e^0 = 1$. Par produit, $\lim\limits_{x\to 0} 3xe^x = 0$.

c) Limite de $\frac{f}{g}$

$\lim g$ / $\lim f$	l	$+\infty$	$-\infty$
$l'\neq 0$	$\frac{l}{l'}$	signe(l').∞	-signe(l').∞
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Si $\lim g = 0$, il faut tout d'abord préciser si $\lim g = 0^+$ (g tend vers 0 en restant positif) ou si $\lim g = 0^-$, et on applique :

$\lim g$ / $\lim f$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe(l).∞	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe(l).∞	$-\infty$	$+\infty$

Exemple 11. —

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{x^2+1}{x} = +\infty$$

Solution. En effet, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\dfrac{1}{x} = 1$ par somme, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}} = 0$.

De même, $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+1 = 1$ par somme et $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0^+$. Par quotient, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

2) Limite d'une fonction composée

Théorème 12.8.

Soient f, g, h trois fonctions telles que $f(x) = g(h(x))$ sur un intervalle I. Soient a, b, c des éléments de $\mathbb{R}\cup\{+\infty; -\infty\}$.
Si $\lim\limits_{x\to a} h(x) = b$ et $\lim\limits_{x\to b} g(x) = c$, alors

$$\lim_{x\to a} f(x) = c$$

Démonstration. Admis. □

Méthode 12.2.

Pour déterminer la limite d'une fonction composée $f(x) = g(h(x))$ en x_0 :

- On pose $X = h(x)$.
- On détermine la limite b de X en x_0.
- On détermine la limite c de g en b, et on conclut : la limite de f en x_0 vaut c.

Exemple 12. — Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1}$.

Solution.

- On pose $X = x^2 - x + 1$. On a

$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty$$

- On a

$$\lim_{X\to+\infty} \sqrt{X} = +\infty$$

Par composée, on a donc

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2-x+1} = +\infty$$

Exercice 2. — Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$.

Solution. Posons $X = 3x-1$. Alors :

- On a $\displaystyle\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} 3x-1 = 0^+$.
- De plus, $\displaystyle\lim_{X\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{X}} = +\infty$ par quotient.

Par composée,

$$\lim_{x\to\left(\frac{1}{3}\right)^+} \frac{1}{\sqrt{3x-1}} = +\infty$$

3) Limites usuelles

a) Limites classiques

On dispose d'un ensemble de limites usuelles.

Proposition 12.9. Fonctions usuelles

$$\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\text{Pour tout entier } n\in\mathbb{N},\ \lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \text{ si } n \text{ est pair, } -\infty \text{ sinon.}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} [x] = +\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} [x] = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} |x| = \lim_{x\to-\infty} |x| = +\infty$$

Proposition 12.10. Fonctions puissances

$$\text{Pour tout } \alpha>0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0} x^\alpha = 0$$

$$\text{Pour tout } \alpha<0,\ \lim_{x\to+\infty} x^\alpha = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0} x^\alpha = +\infty$$

$$\text{Pour tout } a>1,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} a^x = 0$$

$$\text{Pour tout } a \text{ tel que } 0<a<1,\ \lim_{x\to+\infty} a^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty$$

b) Croissances comparées

Théorème 12.11.

Pour tout $\alpha > 0$, et $q > 0$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{\ln^q(x)} = +\infty$$

Conséquence 1. — Par passage à l'inverse,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln^q(x)}{x^\alpha} = 0$$

Théorème 12.12.

Pour tout $\alpha > 0$,
$$\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0$$

Démonstration. Posons $X = \frac{1}{x}$. Alors $\lim_{x\to 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = \lim_{X\to+\infty} -\frac{\ln(X)}{X^\alpha} = 0$ d'après ce qui précède. □

Théorème 12.13.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$

Démonstration. Se démontre de la même manière que précédemment (en posant $X = -x$). □

Méthode 12.3.

Pour utiliser les croissances comparées, il faut souvent faire un changement de variable pour s'y ramener.

Exemple 13. — Déterminer $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3}$.

Solution. On pose $X = 2x$. Alors
$$\lim_{x\to+\infty} X = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} = \lim_{X\to+\infty} \frac{e^X}{(X/2)^3} = \lim_{X\to+\infty} 2^3 \frac{e^X}{X^3} = +\infty \text{ par croissance comparée.}$$

4) Autres limites

Théorème 12.14.

On dispose des limites suivantes :
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

Démonstration. Nous verrons la démonstration de ces limites dans le chapitre dédié à la Dérivation. □

Exemple 14. — Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln(1+x)}{x^3}$.

Solution. On remarque que, pour tout réel $x>0$:

$$\frac{\ln(1+x)}{x^3}=\frac{\ln(1+x)}{x}\times\frac{1}{x^2}$$

Or

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1 \text{ et } \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^2}=+\infty$$

Par produit,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x^3}=+\infty$$

5) Quelques indéterminations classiques

a) Polynômes et fractions rationnelles

Méthode 12.4.

En $+\infty$ ou en $-\infty$, il y a une méthode classique dite du terme du plus haut degré.

- Si $f : x\mapsto a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ est un polynôme, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}a_nx^n$.
- Si $g : x\mapsto \dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0}{b_kx^k+b_{k-1}x^{k-1}\cdots+b_0}$ est une fraction rationnelle, alors $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_kx^k}$.

Exemple 15. — Soient $f : x\mapsto 2x^3-3x^2+6x-1$ et $g : x\mapsto \frac{x^2+1}{2x^2-3x+1}$. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)$

Solution. D'après la règle du terme du plus haut degré,

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}2x^3=+\infty$$

De même,

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2}{2x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Remarque 15. — ⚠ Cette méthode ne s'applique qu'aux limites en $+\infty$ et $-\infty$.

b) Racines

Méthode 12.5.

Lorsqu'une fonction contient des radicaux, on utilise la quantité conjuguée.

Exemple 16. — Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+1} - x$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Solution. On constate que la limite en $+\infty$ de f est indéterminée. Alors,

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1} - x)\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$$

et donc, par composée et quotient,

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

c) $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$

Méthode 12.6.

Dans les cas $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$, on commence par mettre au numérateur et au dénominateur le terme prépondérant (en utilisant les croissances comparées).

Exemple 17. — Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{e^x - 1}$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Solution. Alors

$$\frac{x+1}{e^x-1} = \frac{x}{e^x}\frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}}$$

Or

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \to +\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1-e^{-x}} = 1 \text{ par quotient}$$

Par produit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

V. Etude des limites d'une fonction

1) 1ère étape : limites

Lorsqu'on se donne une fonction, on commencera toujours par déterminer ses limites au borne de l'intervalle de définition :

- Si f est définie sur $\mathbb{R}$, on déterminera $\lim_{x \to +\infty} f$ et $\lim_{x \to -\infty} f$.
- Si f est définie sur $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$, il faut déterminer 4 limites : en $+\infty$, $-\infty$, a^+ et a^-.

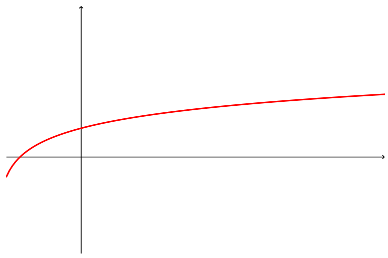
On notera directement les asymptotes horizontales (limite finie en $+\infty$ ou $-\infty$) et les asymptotes verticales (limite infinie en a^+ ou a^-).

2) 2ème étape : branches infinies

Si les limites en $+\infty$ et/ou $-\infty$ sont infinies, on cherche une éventuelle asymptote oblique. Pour cela on détermine

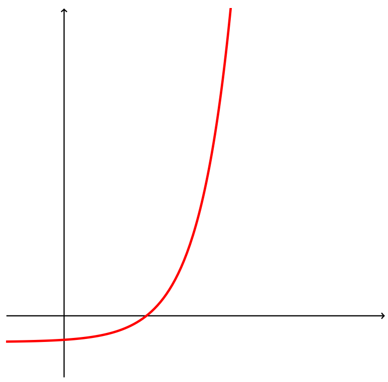
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

- Si cette limite est nulle, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des abscisses** en $+\infty$.



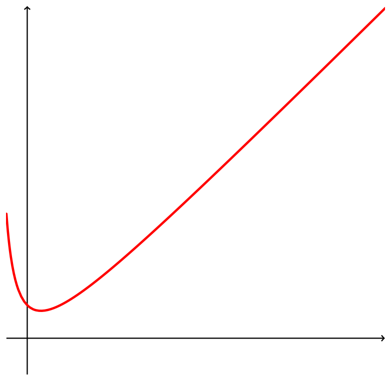
L'exemple classique est la fonction logarithme népérien.

- Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction l'axe des ordonnées** en $+\infty$.

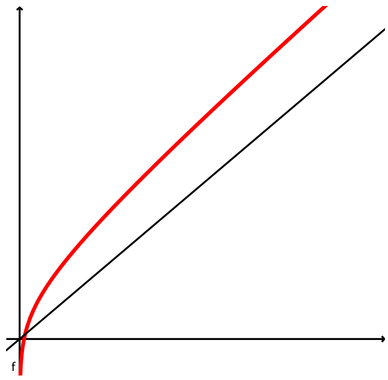


L'exemple classique est la fonction exponentielle.

- Si cette limite est un nombre réel a, on dit que la courbe de f admet une direction asymptotique d'équation $y = ax$. Il reste alors à calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - ax)$.
  - Si cette limite est un réel b, la droite d'équation $y = ax + b$ est **asymptote oblique** à la courbe de f en $+\infty$.



  - Si cette limite est infinie, on dit que la courbe de f possède une **branche parabolique de direction la droite d'équation** $y = ax$.



(bien sûr, tout ceci est valable en $-\infty$.)

VI. Continuité

1) Continuité en un point, sur un intervalle

Définition 10. — Soit f une fonction, et I un **intervalle** inclus dans l'ensemble de définition de f.

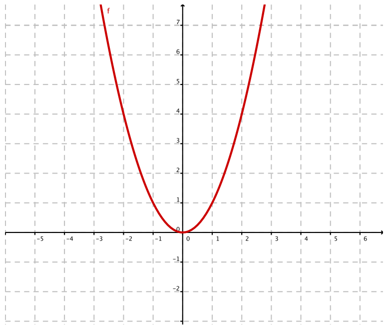
- On dit que la fonction f est **continue à droite en un point a** de I si f admet une limite à droite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue à gauche en un point a** de I si f admet une limite à gauche en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$
- On dit que la fonction f est **continue en un point a** de I si f admet une limite en a, qui est égale à $f(a)$:
$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$
- On dit que f est **continue sur l'intervalle I** si elle est continue en tout point de I.

Remarque 16. — Ainsi, f est continue en a si et seulement si

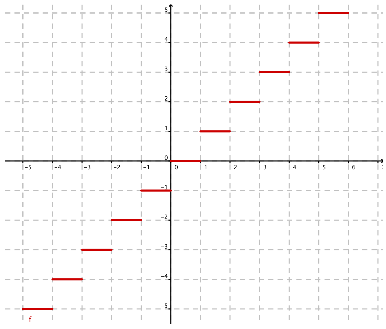
$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, \eta > 0,\ \forall\, x \in \mathrm{I},\ |x-a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Remarque 17. — Il résulte des théorèmes sur les limites que la **somme**, le **produit**, et la **composée** de deux fonctions continues est continue.

Exemple 18. — La fonction carré est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.



Exemple 19. — La fonction **partie entière** n'est pas continue en $0, 1, 2, \dots$:



Propriété 1. — *D'après un résultat vu sur les limites de fonctions, f est continue en a si et seulement si f est continue à droite et à gauche en a et si ces limites sont égales.*

Méthode 12.7.

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est continue en un réel a, on calcule les limites à droite et à gauche en ce réel, et on montre que les deux limites valent $f(a)$.

Exemple 20. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ e^{-x} & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

Solution. On a $f(0) = 1$. Constatons alors que

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x+1 = 1 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} e^{-x} = e^{-0} = 1 = f(0)$$

Ainsi, f est continue à droite et à gauche en 0. Elle est donc continue en 0.

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Karl Weierstrass (encore lui) donna vers 1850 la première définition de la continuité d'une fonction. C'est également lui qui donna les définitions rigoureuses de la dérivée, que l'on verra plus tard.

2) Continuité des fonctions usuelles

Proposition 12.15.

- Les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions rationnelles sont continues sur tout intervalle contenu dans leur domaine de définition.
- La fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine carré est continue sur $[0;+\infty[$.
- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$, et la fonction ln sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les fonctions puissances $x \mapsto a^x$ $(a > 0)$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Les fonctions puissances $x \mapsto x^a$ $(a \in \mathbb{R})$ sont continues sur $\mathbb{R}^{+*}$.
- Les fonctions trigonométriques $(\cos, \sin, \tan)$, trigonométriques réciproques $(\arccos, \arcsin, \arctan)$ et hyperboliques $(\mathrm{ch}, \mathrm{sh}, \mathrm{th})$ sont continues sur leur domaine de définition.

Démonstration. Admis. On verra dans un chapitre ultérieure qu'une fonction dérivable est continue, ce qui nous permet de conclure rapidement. □

3) Prolongement par continuité

Définition 11. — Soit f une fonction définie sur un intervalle I sauf en un réel a. On suppose que f est continue sur $\mathrm{I}\backslash\{a\}$, et qu'il existe un réel l tel que $\lim_{x\to a} f(x) = l$. On dit qu'on peut **prolonger par continuité** la fonction f en posant $f(a) = l$. On définit ainsi une nouvelle fonction, définie sur I, qui est continue sur I et coïncide avec f sur $\mathrm{I}\backslash\{a\}$.

Exemple 21. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = x\ln(x)$. Montrer que l'on peut prolonger par continuité f en 0.

Solution. On constate que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0 \text{ par croissance comparée}$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité f en 0 en posant $f(0) = 0$.

Remarque 18. — Rigoureusement, on doit définir une nouvelle fonction $\tilde{f}$ qui est égale à f sur $\mathrm{I}\backslash\{a\}$, et telle que $\tilde{f}(a) = l$. En pratique, on confondra toujours $\tilde{f}$ et f.

4) Tableau de variations et convention

Remarque 19. — Dans un tableau de variation, on convient que les flèches obliques indiquent que la fonction est **continue et strictement monotone**.

5) Suites récurrentes et continuité

Théorème 12.16.

Soit f une fonction continue, et l un réel. Soit (u_n) une suite convergente, de limite l. Alors la suite $(f(u_n))$ converge également, et a pour limite $f(l)$.

Remarque 20. — Si f n'est pas continue en x_0 mais si la fonction f a pour limite l en x_0, alors quelque soit la suite (u_n) de limite x_0, $(f(u_n))$ converge vers l.

Théorème 12.17. Théorème du point fixe

Soit f une fonction continue, et u une suite définie par u_0 donné, et pour tout n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si la suite u est convergente, alors par passage à la limite, en notant l la limite de u, on en déduit que la limite l vérifie $l = f(l)$: c'est donc un **point fixe** de la fonction f.

Méthode 12.8.

Le théorème précédent permet souvent de déterminer la limite d'une suite définie par récurrence lorsqu'elle est convergente.

Exercice 3. — Soit u la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$.

1. Montrer que la suite u est croissante, et que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
2. En déduire que la suite u converge, et déterminer sa limite.

Solution.

1. Méthode classique : on montre par récurrence que pour tout n, $0 \leqslant u_n \leqslant 1$ et que $u_n \leqslant u_{n+1}$.
   Pour tout entier n, soit P_n la proposition définie par "$0 \leqslant u_n \leqslant 1$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant 1$: P_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété P_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que P_{n+1} est vraie.
     On a $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{0} \leqslant \sqrt{u_n} \leqslant 1$$
     et donc $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: P_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.
   - Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n :
     $$\forall\ n,\ 0 \leqslant u_n \leqslant 1$$

   Pour tout entier n, soit Q_n la proposition définie par "$u_n \leqslant u_{n+1}$".
   - Initialisation : pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} > u_0$. $u_0 \leqslant u_1$: Q_0 est vraie.
   - Hérédité : supposons que la propriété Q_n est vraie pour un certain entier n, et montrons que Q_{n+1} est vraie.
     On a $u_n \leqslant u_{n+1}$. La fonction racine étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a donc
     $$\sqrt{u_n} \leqslant \sqrt{u_{n+1}}$$

et donc $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$: Q_{n+1} est donc vraie : la propriété est héréditaire.

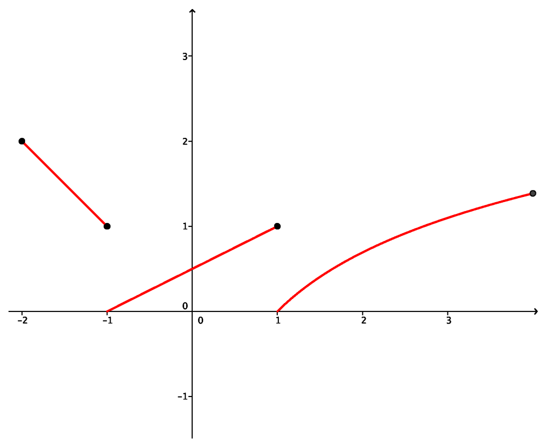
- Conclusion : d'après le principe de récurrence, la proposition Q_n est vraie pour tout entier n :
$$\forall\ n,\ u_n \leqslant u_{n+1}$$
La suite u est donc croissante.

Remarque : on aurait également pu démontrer, par récurrence, les deux propositions en une seule, en démontrant "$0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$".

2. La suite u est donc croissante et majorée. D'après le théorème de convergence monotone, celle-ci converge. Notons l sa limite. Puisque la fonction racine est continue sur $]0;+\infty[$, on en déduit par passage à la limite que que $l = \sqrt{l}$, c'est à dire $l = 0$ ou $l = 1$. Or, puisqu'elle est croissante,
$$\text{Pour tout } n, u_n \geqslant u_0 = \frac{1}{2}$$
La limite est donc 1.

6) Continuité par morceaux

Définition 12. — Une fonction f est dite **continue par morceaux** sur le segment $[a,b]$ sil existe une **subdivision** $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ (c'est-à-dire un découpage du segment $[a;b]$) telle que les restrictions de f à chaque intervalle ouvert $]a_i,a_{i+1}[$ admettent un prolongement continu à lintervalle fermé $[a_i,a_{i+1}]$.



Exemple 22. — La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$. En effet, sur tout segment de la forme $]n;n+1[$ (où $n \in \mathbb{Z}$) le fonction est continue (car constante), et prolongeable par continuité en n et $n+1$.

VII. Fonctions continues et résolution d'équation

1) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 12.18.

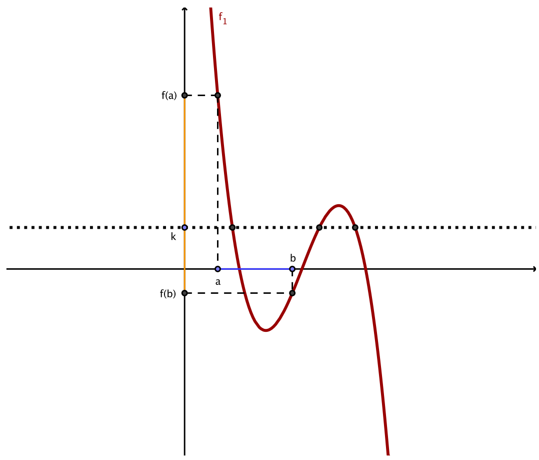
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et à valeurs réelles. Alors l'image $f(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Remarque 21. — On a mieux : si I est un segment, $f(\mathrm{I})$ est également un segment. Ainsi, si I est un segment $[a;b]$, le maximum et le minimum sont atteints : il existe deux réels u et v de I tels que $f(u) = \max_{x\in \mathrm{I}} f(x)$ et $f(v) = \min_{x\in \mathrm{I}} f(x)$.

On utilisera la variante plus explicite suivante :

Théorème 12.19.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$. Alors, pour tout réel k pris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c de l'intervalle $[a;b]$, tel que $f(c) = k$.



Démonstration. Théorème admis. □

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Bernard Bolzano donna en 1817 la première démonstration analytique de ce théorème. **Weierstrass** en donna une autre plus tard, vers 1850.

2) Théorème de la bijection

Dans le cas d'une fonction continue strictement monotone sur un segment, on dispose d'un énoncé plus précis :

Théorème 12.20.

Soit f une fonction **continue strictement monotone** sur l'intervalle $\mathrm{I} = [a;b]$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ possède une **unique solution** dans $[a;b]$.

Démonstration. Soit k un réel compris entre $f(a)$ et (b). f étant une fonction continue, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c tel que $f(c) = k$. Supposons la fonction strictement croissante (le cas décroissant se montre de la même manière). Alors :

- Pour tout $x > c$, on a $f(x) > f(c) = k$ donc il n'y a aucun réel $x > c$ vérifiant $f(x) = k$.
- Pour tout $x < c$, on a $f(x) < f(c) = k$ donc il n'y a aucun réel $x < c$ vérifiant $f(x) = k$.

Donc le réel c est le seul. □

Remarque 22. — Ainsi, si $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est continue strictement monotone, alors f est bijective de I sur $f(\mathrm{I})$.

Méthode 12.9.

On utilise le théorème de la bijection (ou *corollaire du théorème des valeurs intermédiaires*) pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution à une équation. On vérifiera bien toutes les hypothèses : continuité, stricte monotonie, et déterminer l'intervalle image.

Exemple 23. — On suppose que la fonction f est continue, et que ses variations sont décrites dans le tableau suivant :

x	0		5
$f(x)$	-3	$\nearrow$	4

Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur $[0;5]$.

Solution.

- f est continue et strictement croissante sur $[0;5]$.
- On a $f(0) = -3$, $f(5) = 4$, donc $f([0;5]) = [-3;4]$.
- $0 \in [-3;4]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires (*ou théorème de la bijection*), l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution sur l'intervalle $[0;5]$.

3) Extension à un intervalle non borné

Le théorème précédent peut être étendu dans le cas d'un intervalle I quelconque.

Théorème 12.21.

Soit f une fonction continue strictement monotone sur un intervalle I. Alors l'image de I par f est encore un intervalle, J. De plus, pour tout réel y de J, l'équation $f(x) = y$ possède une unique solution dans I.

Exemple 24. — Si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a;b]$, alors pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to a^+} f(x); f(b)\right]$, l'équation $f(x) = k$ possède une unique solution dans $]a;b]$.

Exercice 4. — Prouver que l'équation (E) : $x\sqrt{x} = 1 - x$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}_+^*$.

Solution. On se ramène à une écriture $f(x) = k$: $x + x\sqrt{x} = 1$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(x) = x + x\sqrt{x}$. f est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée vaut

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{x} > 0$$

La fonction f est donc strictement croissante, et continue sur $]0;+\infty[$. L'image de $]0;+\infty[$ est donc

$$\left]\lim_{x\to 0} f(x);\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[=]0;+\infty[$$

qui contient 1.
L'équation $f(x)=1$ possède donc une unique solution sur $]0;+\infty[$.

4) Méthode d'encadrement d'une solution par dichotomie

Dans le cas d'une fonction continue, et strictement monotone sur un intervalle $[a;b]$, avec $f(a)$ et $f(b)$ de signe contraire, on peut déterminer une valeur approchée de la solution de l'équation $f(x)=0$ par **dichotomie** : on découpe au fur et à mesure l'intervalle en 2 pour pouvoir cibler la solution.

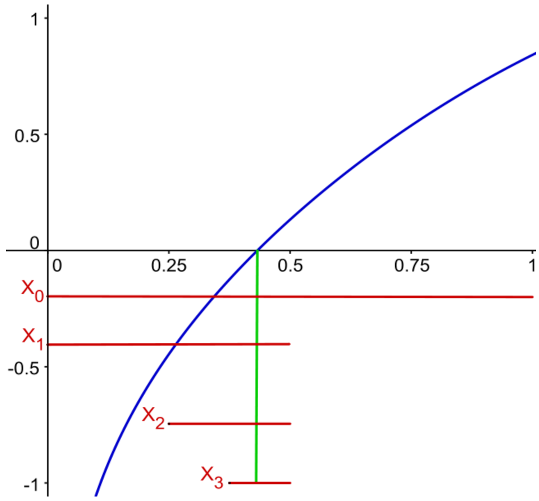


Image disponible sur Wikipédia

RÉFÉRENCE HISTORIQUE

Le mot dichotomie vient du grec *dikha* (*en deux*), et *tomein* (*couper*), c'est à dire "couper en deux".

Algorithme 1. — Dans cet algorithme, e représente la précision de la valeur approchée.

Algorithme 1 : DICHOTOMIE

Entrées : Saisir a, b et e
Tant que $b-a\geqslant e$
  $m\leftarrow \frac{a+b}{2}$
  si $f(a)\times f(m)\leqslant 0$ **alors**
    $b\leftarrow m$
  sinon
    $a\leftarrow m$
  fin
FinTantque
Sorties : Afficher a et b

En Scilab, cela donne (à condition que la fonction f ait été définie, dans le cas f croissante) la fonction suivante, où $[x; y]$ désigne l'intervalle de recherche de départ, et eps la précision :

Programme Scilab 1 : Algorithme de dichotomie

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 21/06/2015
// Résumé : fonction appliquant l'algorithme de dichotomie dans le cas où la fonction f est
// définie et croissante sur l'intervalle wde départ [x;y]. On cherche avec une précision eps.

function [a,b] = dicho (x,y, eps)
a=x
b=y
while(b-a>eps) do
    m=(a+b)/2
    if f(a)*f(m) <= 0 then
        b=m
    else
        a=m
    end
end
endfunction
```

5) Continuité et sens de variation de f^{-1}

Théorème 12.22.

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I. Alors $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ est continue sur $f(\mathrm{I})$, strictement monotone et de même monotonie que la fonction f.

Démonstration. Supposons f strictement croissante (le raisonnement est le même dans le cas décroissant). Soient x et y deux éléments de $f(\mathrm{I})$ tels que $x < y$. Puisqu'ils sont dans $f(\mathrm{I})$, il existe a et b dans I tels que $x = f(a)$ et $y = f(b)$.

Puisque f est strictement croissante, $x = f(a) < f(b) = y \Rightarrow a < b$. Or, $a = f^{-1}(x)$ et $b = f^{-1}(y)$. On a donc montré

$$\forall\, (x, y) \in (f(\mathrm{I}))^2,\ \ x < y \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(y)$$

f^{-1} est donc strictement croissante.

Etant strictement monotone, elle admet des limites à droite et à gauche en tout point de $f(\mathrm{I})$. Supposons qu'il existe $y \in f(\mathrm{I})$ tel que les limites à droite et à gauche de f^{-1} en y soient différentes. En repassant par f, par continuité de f, les limites à droite et à gauche en $f^{-1}(y)$ sont donc différentes, ce qui est absurde, puisque f est continue sur I. □

Exercices

Exercice 5. — Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-3x^2+1 \qquad \lim_{x\to-\infty} x^2+3x-\frac{1}{2x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{2x^2-2x+1} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3+1}{x^2-1} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}}\frac{2x+1}{x} \qquad \lim_{\substack{x\to2\\x>2}}\frac{3x^2+2x+1}{x-2}$$

$$\lim_{\substack{x\to2\\x<2}}\frac{x^2-5x+6}{(2-x)^2} \qquad \lim_{\substack{x\to3\\x>3}}\frac{-2x-3}{\sqrt{x-3}}$$

Exercice 6. — Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-x}{e^x-1} \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-x}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} \qquad \lim_{x\to0+}\frac{(x^5)^x}{(5^x)^5} \qquad \lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{2^x}$$

$$\lim_{x\to0^+} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x}}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}$$

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(\sqrt{x})}{x^{1/4}} \qquad \lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x}}{e^x-1}$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x+1}{x^2\ln(x)} \qquad \lim_{x\to0^+}(1+x)^{\ln(x)}$$

Exercice 7. — Déterminer la limite en 0 de la fonction f définie par

$$\forall\, x\in\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases} x\ln(x) \text{ si } x>0\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

Exercice 8. — Déterminer le domaine de définition, les limites aux bornes et le comportement asymptotique aux bornes des fonctions suivantes :

$$f : x\mapsto 2\sqrt{x}+14 \qquad g : x\mapsto\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$$

Continuité

Exercice 9. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x)=x\ln(x)$ pour $x>0$, et $f(0)=0$. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 10. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$, et $f(x) = e^x$ pour $x \geqslant 0$. La fonction f est-elle continue ?

Exercice 11. — Etudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto x - [x]$ en 0.

Exercice 12. — Peut-on prolonger la fonction f définie sur $]0;1[$ par $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$ en 0 ? en 1 ?

Exercice 13. — Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, telle que $f([0;1]) \subset [0;1]$. En posant $g : x \mapsto f(x) - x$, montrer que la fonction f admet au moins un point fixe.

Exercice 14. — Soit $n > 0$ et $a_1, \cdots a_n$ des réels deux à deux distincts de $[0;1]$. Soit f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} |x - a_k|$$

Calculer $f_n(0) + f_n(1)$, et en déduire qu'il existe au moins un réel u de $[0;1]$ tel que $f_n(u) = \frac{1}{2}$.

Suites et continuité

Exercice 15. — Soit $n \geqslant 3$. On note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f_n(x) = x - n\ln(x)$.

1. Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions. En notant u_n la plus petite, et v_n la plus grande, vérifier que $\forall\ n \geqslant 3, 0 < u_n < n < v_n$.
2. Quelle est la limite de la suite v ?
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 3$, $1 < u_n < e$.
4. Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
5. Montrer que la suite u est convergente, puis en encadrant $\ln(u_n)$, déterminer sa limite.