Chapitre 13

Espaces vectoriels en dimension finie

Résumé

On s'intéresse dans ce chapitre à la notion d'espaces vectoriels de dimension finie, c'est-à-dire ayant une base finie. On en déduit des résultats intéressants, permettant d'avoir des méthodes plus efficaces. On s'intéresse enfin aux applications linéaires en dimension finie.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dimension :
- Savoir montrer qu'une famille est une base d'un sous-espace vectoriel . . . . □
- Savoir déterminer le rang d'une famille et la dimension d'un espace vectoriel . . . . □

② Savoir utiliser la dimension finie :
- montrer qu'une famille finie ou génératrice ayant le bon nombre d'éléments est une base . . . . □
- connaître la formule de Grassman, et le cas des espaces en somme directe . . . . □

③ Concernant les applications linéaires :
- savoir déterminer la matrice d'une application linéaire dans des bases données . . . . . . □
- savoir écrire la matrice de passage d'une base à une autre . . . . □
- connaître la matrice d'un projecteur et d'une symétrie dans des bases adaptées . . . . . . □

④ Connaître la trace d'une matrice et d'un endomorphisme, ainsi que ses propriétés . . . . . . □

⑤ Savoir calculer le rang d'une application linéaire ou d'une matrice . . . . □

⑥ Savoir utiliser la formule du rang pour déterminer certaines dimensions . . . . □

Dans l'ensemble de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Quelques compléments

1) Projecteurs

Définition 1. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Tout élément $x \in \mathrm{E}$ peut s'écrire de manière unique $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{F}$ et $z \in \mathrm{G}$. On appelle alors **projecteur** sur F parallèlement à G l'application $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par

$$\forall\ x = y + z \in \mathrm{E} \text{ avec } (y, z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad p(x) = y$$

Remarque 1. — Ainsi, la composante suivant F est conservée, et celle suivant G est supprimée.

Proposition 13.1.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G. Alors p est un endomorphisme de E.

Démonstration. Par construction, $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$. Montrons que p est linéaire. Soient $(x, x') \in \mathrm{E}^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit, de manière unique $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, avec $(y, y') \in \mathrm{F}^2$ et $(z, z') \in \mathrm{G}^2$. Mais alors $\lambda x + x' = (\lambda y + y') + (\lambda z + z')$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\lambda y + y' \in \mathrm{F}$ et $\lambda z + z' \in \mathrm{G}$. Ainsi

$$p(\lambda x + x') = p((\lambda y + y') + (\lambda z + z')) = \lambda y + y' = \lambda p(x) + p(x')$$

Ainsi, f est linéaire et c'est ainsi un endomorphisme de E. □

Proposition 13.2.

Si p est un projecteur, alors $p \circ p = p$.

Solution. En effet, si $x = y + z$ avec $(y, z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}$, alors

$$p \circ p(x) = p(p(y + z)) = p(y) = y$$

Remarque 2. — Il s'agit en réalité d'une équivalence : p est un projecteur si et seulement si $p^2 = p$.

2) Symétrie

Définition 2. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Tout élément $x \in \mathrm{E}$ peut s'écrire de manière unique $x = y + z$ avec $y \in \mathrm{F}$ et $z \in \mathrm{G}$. On appelle alors **symétrie** par rapport à F parallèlement à G l'application $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ définie par

$$\forall\ x = y + z \in \mathrm{E} \text{ avec } (y, z) \in \mathrm{F} \times \mathrm{G}, \quad p(x) = y - z$$

Remarque 3. — Ainsi, la composante suivant F est conservée, et celle suivant G devient l'opposée.

Proposition 13.3.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux espaces vectoriels supplémentaires dans E. Soit s la symétrie sur F parallèlement à G. Alors s est un endomorphisme de E.

Démonstration. Par construction, $s : E \to E$. Montrons que s est linéaire. Soient $(x, x') \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On écrit, de manière unique $x = y + z$ et $x' = y' + z'$, avec $(y, y') \in F^2$ et $(z, z') \in G^2$. Mais alors $\lambda x + x' = (\lambda y + y') + (\lambda z + z')$. Puisque F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, $\lambda y + y' \in F$ et $\lambda z + z' \in G$. Ainsi

$$s(\lambda x + x') = s((\lambda y + y') + (\lambda z + z')) = \lambda y + y' - (\lambda z + z') = \lambda(y - z) + (y' - z') = \lambda s(x) + s(x')$$

Ainsi, f est linéaire et est un endomorphisme de E. □

Proposition 13.4.

Si s est une symétrie, alors $s \circ s = \mathrm{id}_E$.

Solution. En effet, si $x = y + z$ avec $(y, z) \in F \times G$, alors

$$s \circ s(x) = s(s(y + z)) = s(y - z) = y + z = x$$

Remarque 4. — Il s'agit en réalité d'une équivalence : s est une symétrie si et seulement si $s^2 = \mathrm{id}_E$.

II. Dimension finie

1) Rappels sur les bases

Rappel 1. — *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, et* $(e_1, \cdots, e_n)$ *une famille de vecteur de* E.

- *La famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est dite* ***génératrice*** *si et seulement si* $(e_1, \cdots, e_n)$ *engendre* E*, c'est-à-dire si*

$$\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n) = E$$

- *La famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est dite* ***libre*** *si et seulement si*

$$\forall\, (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n = 0 \Longrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

- *La famille* $(e_1, \cdots, e_n)$ *est une* ***base*** *de* E *si et seulement si la famille est libre et génératrice.*

Exercice 1. — Parmi les familles suivantes, déterminer les familles libres, génératrice dans $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$:

1. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.
2. $\left(\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\right)$.

3. $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

Solution. Concernant la liberté, on part de $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ et on résout le système. S'il est de Cramer, la famille est libre, sinon, elle est liée. On obtient que les première et deuxième familles sont libres, mais la troisième est liée ; par exemple

$$-\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

Montrer montrer qu'une famille est génératrice, on résout $\lambda_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ d'inconnue $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$. Si ce système a au moins une solution pour tout (x,y,z) fixé, la famille est génératrice. Si ce système n'a pas de solution, on exhibe un contre-exemple et la famille n'est pas génératrice. Ainsi, la première est génératrice, mais la deuxième et la troisième ne le sont pas. Par exemple, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ n'est atteint ni avec la deuxième matrice, ni avec la troisième.
Bilan : la première famille est donc une base, la deuxième est libre mais pas génératrice et la dernière est ni libre ni génératrice.

2) Dimension finie et coordonnées

Définition 3. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On dit que E est de **dimension finie** s'il existe une famille génératrice de E ayant un nombre fini d'éléments.

Exemple 1. — Par exemple, $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ est de dimension finie, puisque la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est génératrice.

Proposition 13.5.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $\mathscr{B}=(e_1,\cdots,e_n)$ une famille de E. Alors $\mathscr{B}$ est une base de E si et seulement si

$$\forall\, y\in E,\quad \exists!(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n,\quad y=\lambda_1e_1+\cdots+\lambda_ne_n$$

Ainsi, chaque vecteur de E s'écrit d'une manière unique comme combinaison linéaire de vecteurs de la base. Les coefficients $(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$ sont appelés les **coordonnées** de y dans la base B. On notera alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(y)=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \dots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

Méthode 13.1.

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur u dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$, on écrit $u = \lambda_1 e_1 + \cdots + \lambda_n e_n$ et on résout le système pour obtenir les coordonnées $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.

Exercice 2. — Soit $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que $\mathscr{B}$ est une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, puis déterminer $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$, où $u = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solution. Rapidement, la famille est libre et génératrice, donc forme une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. On cherche deux réels λ et μ tels que $\lambda\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$. On obtient le système

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} \lambda & + & \mu & = & 3 \\ -\lambda & + & \mu & = & 5 \end{array}\right. \sim \left\{\begin{array}{ll} \lambda & = -1 \\ \mu & = 4 \end{array}\right.$$

Ainsi, $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

On dispose d'un théorème essentiel : toutes les bases d'un même espace vectoriel ont le même nombre d'éléments.

Théorème 13.6.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Alors

- toute famille libre de E a au plus n éléments;
- toute famille génératrice a au moins n éléments;
- toute base a exactement n éléments.

On appellera alors dimension de E ce nombre n, noté $\dim(\mathrm{E})$.

Notation 1. — Par convention, l'espace vectoriel nul a pour dimension 0 : $\dim(\{0\}) = 0$.

Proposition 13.7.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Alors toute famille composée de $n+1$ vecteurs de E est liée.

Démonstration. En effet, d'après le théorème précédent, une famille libre a au plus n éléments. Si elle en possède $n+1$, elle est forcément liée. □

3) Dimension des espaces usuels

Proposition 13.8. Dimension des espaces usuels

On a :

- $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n \times p$.

- $\dim(\mathbb{K}_n[X]) = n+1$.

Les espaces $\mathbb{R}[X]$, $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ (avec I non réduit à un point) et l'ensemble des suites $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ sont des espaces de dimension infinie.

Démonstration. On dispose des bases canoniques :

- $\begin{pmatrix} 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \vdots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est une base de $\mathbb{K}^n$, possédant n éléments : $\dim(\mathbb{K}^n) = n$.
- la famille des $(E_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$, où $E_{i,j}$ est la matrice $n\times p$ composée de 0 sauf un 1 en ligne i, colonne j, est une base de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, possédant $n\times p$ éléments. Donc $\dim(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = n\times p$.
- la famille $(1, X, X^2, \cdots, X^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ donc $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$.

Enfin, $(1, X, X^2, \cdots, X^n, \cdots)$ est une famille infinie génératrice de $\mathbb{R}[X]$, qui est donc de dimension infinie. □

4) Rang d'une famille

Définition 4. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $(e_1, \cdots, e_p)$ une famille de vecteurs de E. On appelle **rang** de la famille $(e_1, \cdots, e_p)$ la dimension de l'espace vectoriel $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. On le note $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_p)$.

Propriété 1. — *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie. Soit* $(e_1, \cdots, e_p)$ *une famille de vecteurs de* E.

- $(e_1, \cdots, e_p)$ *est libre si et seulement si* $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_p) = p$.
- $(e_1, \cdots, e_p)$ *est génératrice si et seulement si* $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_p) = n$.

Démonstration. $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre si et seulement si $(e_1, \cdots, e_p)$ forme une base de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Ainsi, si $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, alors $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_p) = p$. Réciproquement, si $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_p) = p$, alors $(e_1, \cdots, e_p)$ est une famille libre, sinon la dimension de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_p) < p$.
Le cas de la famille génératrice se traite de la même manière. □

Remarque 5. — Si $(e_1, \cdots, e_k)$ est une sous famille libre de $(e_1, \cdots, e_p)$, alors $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_p) \geqslant k$. Si $(e_1, \cdots, e_k)$ est une famille génératrice de $\mathrm{Vect}(e_1, \cdots, e_n)$, alors $\mathrm{rg}(e_1, \cdots, e_n) \leqslant k$.

III. Bases en dimension finies

1) Caractérisation d'une base en dimension finie

En dimension finie, on dispose d'un théorème très important : une famille libre (ou génératrice) ayant le même nombre d'éléments que la dimension est automatiquement une base.

Théorème 13.9.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.

- Si une famille $\mathscr{B}$ est une famille libre à n éléments, elle forme une base de E.
- Si une famille $\mathscr{B}$ est une famille génératrice à n éléments, elle forme une base de E.

Méthode 13.2.

En dimension finie, il suffit de montrer qu'une famille est libre et possède le bon cardinal pour conclure qu'elle forme une base de l'espace vectoriel.

Exemple 2. — Soit $\mathscr{B} = (1, X-1, X^2-1)$. Montrer que $\mathscr{B}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Solution. La famille $\mathscr{B}$ est libre, car échelonnée en degré. On peut également le montrer en partant de $\lambda_1 + \lambda_2(X-1) + \lambda_3(X^2-1) = 0$ et identifier les coefficients. Mais alors, elle est libre, de cardinal 3. Or, $\dim(\mathbb{R}_2[X]) = 3$. Ainsi, elle est libre et possède 3 éléments : la famille $\mathscr{B}$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

2) Théorème de la base incomplète

Théorème 13.10. Théorème de la base incomplète

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel **de dimension finie**.

- De toute famille génératrice de E, on peut extraire une base de E.
- Toute famille libre de E peut être complétée en une base de E.

Démonstration. L'idée est simple : on part d'une famille libre de E : $(e_1, \cdots, e_p)$. Soit elle est génératrice et forme donc une base de E. Soit elle n'est pas génératrice, et alors il existe $u \in E$ tel que $u \notin \text{Vect}(e_1, \cdots, e_p)$. Alors, par construction, $(e_1, \cdots, e_p, u)$ est une famille libre, et on réitère.
Pour l'autre point, on raisonne de la même manière : soit la famille génératrice $(e_1, \cdots, e_p)$ est libre, mais alors elle forme une base de E. Soit elle n'est pas libre, mais alors un des e_i peut s'exprimer en fonction des autres, disons e_p pour simplifier. Mais alors, $(e_1, \cdots, e_{p-1})$ est encore génératrice et on réitère. □

Remarque 6. — Ainsi, tout espace vectoriel de dimension finie non nulle possède une base. En effet, en prenant x non nul dans cet espace vectoriel, la famille (x) est libre. D'après le théorème précédent, on peut donc la compléter en une base.

3) Dimensions et sous-espaces vectoriels

Proposition 13.11.

Soit F un sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie.

- F est de dimension finie ;
- $\dim(F) \leqslant \dim(E)$.
- $\dim(F) = \dim(E)$ si et seulement si $F = E$

Démonstration. Toute famille libre de F est également une famille libre de E. Puisque E est de dimension n, toute famille libre de F ne peut posséder, au plus, que n éléments. Ainsi, par théorème, F est également de dimension finie, et $\dim(F) \leqslant \dim(E)$. Enfin, si $\dim(F) = \dim(E)$, on prend une base de F, ayant $\dim(F) = n$ éléments. Puisque $F \subset E$, cette base est une famille libre de F et donc de E. Mais puisque E est également de dimension n, c'est une base de E, et donc $F = E$. □

Méthode 13.3.

Ainsi, pour montrer qu'un sous-espace vectoriel F est l'espace E tout entier, il peut être judicieux de montrer que $\dim(F) = \dim(E)$.

Exemple 3. — Soit $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$. Montrer que $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Solution. On peut voir que $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ est une famille libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi, il s'agit d'une base de E et $\dim(E) = 2$. Or $E \subset \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ et $\dim(E) = \dim(\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}))$. Ainsi, $E = \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

Proposition 13.12. Formule de Grassmann

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et F, G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

En particulier, si F et G sont en somme directe :

$$\dim(F \bigoplus G) = \dim(F) + \dim(G)$$

4) Dimension finie et supplémentaire

Théorème 13.13.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et F un sous-espace vectoriel de E. Alors il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que $F \bigoplus G = E$. De plus,

$$\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$$

Réciproquement, si F et G sont en somme directe, et si $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$ alors F et G sont supplémentaires dans E. Connaissant $(e_1, \cdots, e_k)$ une base de F, et $(f_1, \cdots, f_{n-k})$ une base de G, alors $(e_1, \cdots, e_k, f_1, \cdots, f_{n-k})$ est une base de E.

Remarque 7. — Ainsi, si G et H sont deux supplémentaires d'un même sous-espace vectoriel F, alors $\dim(G) = \dim(H)$.

Méthode 13.4.

En dimension finie, pour démontrer que deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires dans E, on peut alors raisonner ainsi :

- On montre que la somme est directe : $F \cap G = \{0\}$.
- On montre ensuite que $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$.

On conclut alors que F et G sont supplémentaires dans E.

Exemple 4. — Soient $E = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ et $F = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$. Montrer que E et F sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Solution. Constatons que la famille $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est libre (car non nulle), ainsi que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right)$ (vecteurs non colinéaires). Ainsi, $\dim(E) = 1$ et $\dim(F) = 2$. Enfin, soit $u \in E \cap F$. Alors, il existe x tel que $u = \begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}$, et y, z vérifiant $u = y\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. On a alors

$$\begin{pmatrix}y+2z\\z\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix} \Leftrightarrow z = y = x = 0$$

Ainsi, $u = 0$ et $E \cap F = \{0\}$. La somme $E + F$ est donc directe, et $\dim(E) + \dim(F) = 3 = \dim(\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}))$: E et F sont supplémentaires dans $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

IV. Dimension finie et application linéaire

1) Applications linéaires en dimension finie

En dimension finie, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base de l'espace de départ.

Proposition 13.14.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$. Alors $(f(e_1), \cdots, f(e_n))$ une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.

Méthode 13.5.

Pour déterminer l'image d'une application linéaire, on prend donc une base de l'espace de départ, et on détermine l'image de cette base par une application linéaire. On détermine ensuite une base de l'image en vérifiant la liberté éventuelle de la famille obtenue.

Exercice 3. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(a, b, c) = (a + b + c, a + c, a - b + c)$. Démontrer que f est linéaire, et déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.

Solution. Soient $x = (a, b, c), y = (a', b', c')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned}
f(\lambda x + y) &= f(\lambda a + a', \lambda b + b', \lambda c + c') \\
&= (\lambda a + a' + \lambda b + b' + \lambda c + c', \lambda a + a' + \lambda c + c', \text{ă}\lambda a + a' - (\lambda b + b') + \lambda c + c') \\
&= (\lambda(a + b + c) + (a' + b' + c'), \lambda(a + c) + (a' + c'), \lambda(a - b + c) + (a' - b' + c')) \\
&= \lambda(a + b + c, a + c, a - b + c) + (a' + b' + c', a' + c', a' - b' + c') \\
&= \lambda f(x) + f(y)
\end{aligned}$$

Ainsi f est une application linéaire, et donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Une base de $\mathbb{R}^3$ est $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$. On a

$$f(1,0,0)=(1,1,1),\quad f(0,1,0)=(1,0,-1),\quad \text{et}\quad f(0,0,1)=(1,1,1)$$

Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Vect}((1,1,1),(1,0,-1),(1,1,1))$. La famille n'est pas libre, puisqu'elle contient deux fois $(1,1,1)$. En revanche, $((1,1,1),(1,0,-1))$ est libre, car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Ainsi,

$$\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Vect}((1,1,1),(1,0,-1))$$

et $((1,1,1),(1,0,-1))$ est une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

Remarque 8. — Si $E=F\bigoplus G$, on a vu que, connaissant une base de F et de G, on en déduit une base de E. Mais alors, connaissant $f|_F$ et $f|_G$, les restrictions de f à F et G, on en déduit complètement f.

2) Isomorphisme et dimension finie

Définition 5. — On dit que deux espaces vectoriels E et F sont **isomorphes** s'il existe un isomorphisme $f : E\to F$.

Exercice 4. — Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[X]$ définie pour tout $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ par $f(a,b,c)=aX^2+bX+c$. Montrer que f est linéaire, puis déterminer noyau et image. En déduire que $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

Solution. Soient $x=(a,b,c)$, $y=(a',b',c')$ deux éléments de $\mathbb{R}^3$, et $\lambda\in\mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} f(\lambda x+y) &= f(\lambda a+a',\lambda b+b',\lambda c+c')\\ &= (\lambda a+a')X^2+(\lambda b+b')X+(\lambda c+c')\\ &= \lambda(aX^2+bX+c)+(a'X^2+b'X+c')\\ &= \lambda f(x)+f(y)\end{aligned}$$

Ainsi, f est linéaire.

- Soit $x=(a,b,c)\in\mathrm{Ker}(f)$. On a alors $f(a,b,c)=0$, c'est-à-dire $aX^2+bX+c=0$. Par identification des coefficients, $a=b=c=0$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(f)=\{0\}$: la fonction f injective.
- $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a rapidement

$$f(1,0,0)=X^2,\quad f(0,1,0)=X,\quad \text{et}\quad f(0,0,1)=1$$

  Ainsi, $\mathrm{Im}\,(f)=\mathrm{Vect}(1,X,X^2)=\mathbb{R}_2[X]$ en reconnaissant la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. f est donc bijective.

Bilan : f est donc un isomorphisme. Ainsi, $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}_2[X]$ sont isomorphes.

En dimension finie, si deux espaces vectoriels E et F sont isomorphes, alors ils ont la même dimension :

Théorème 13.15.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et soit $f:E\to F$ un isomorphisme. Alors $\dim(E)=\dim(F)$.

En dimension finie, on dispose du résultat suivant :

Proposition 13.16.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriel de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. f est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E est une base de F.

On a alors :

Proposition 13.17.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie n, et soit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors $(f(e_1), \cdots f(e_n))$ est une base de F.

Enfin, dans le cas d'un endomorphisme en dimension finie, on dispose d'un théorème fondamental

Théorème 13.18.

Soit E un $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E)$. Alors f est injective si et seulement si f est surjective si et seulement si f est bijective.

Méthode 13.6.

Pour montrer, en dimension finie, qu'un endomorphisme est bijectif, il suffit de montrer qu'il est injectif.

Exemple 5. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie pour tout (a,b,c) par $f(a,b,c) = (a+b, a+c, b+c)$. Montrer que f est un isomorphisme.

Solution. On démontre rapidement que f est une application linéaire, et est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$. Soit $x = (a,b,c) \in \mathrm{Ker}(f)$. On a alors, en résolvant le système :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad (a+b, a+c, b+c) = (0,0,0) \\ &\Leftrightarrow \quad a = b = c = 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{Ker}(f) = \{(0,0,0)\}$ et f est injective. Mais alors, étant un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie, elle est bijective.

Remarque 9. — ⚠ Ce résultat est faux, dans le cas général, en dimension infinie.

Exercice 5. — Soit $f : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ définie par $f(P) = P'$. Montrer que f est surjective. Est-elle bijective ?

Solution. f est linéaire, puisque la dérivée l'est (exercice de TD du chapitre 11). Il s'agit donc d'un endomorphisme, puisque $f(P) = P' \in \mathbb{R}[X]$. Déterminons son image. On prend $(1, X, \ldots, X^n \ldots)$ une base de $\mathbb{R}[X]$. Mais alors

$$f(1) = 0, \quad f(X) = 1, \quad f(X^2) = 2X, \ldots, f(X^n) = nX^{n-1} \ldots$$

Ainsi, en utilisant les propriétés de l'espace vectoriel engendré :

$$\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(1, 2X, 3X^2, \ldots, nX^{n-1}, \ldots) = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \ldots, X^{n-1}, \cdots)$$

Donc Im $(f) = \mathbb{R}[X]$: f est surjective. Cependant, f n'est pas bijective, puisqu'elle n'est pas injective. En effet $f(1) = 0$ et donc $1 \in \text{Ker}(f)$.

V. Représentation matricielle en dimension finie

1) Matrice d'une application linéaire

L'idée est, en dimension finie, d'avoir une représentation des applications linéaires sous forme matricielle.

Définition 6. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ une base de E, et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$ une base de F. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.
On appelle **matrice de f relativement** aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$, et on note $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$, la matrice $(a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j^{ieme} colonne est le vecteur $f(e_j)$, décomposée dans la base $\mathscr{B}'$:

$$\forall\ j \in [\![1; p]\!], \quad f(e_j) = a_{1j} f_1 + \cdots + a_{nj} f_n$$

$\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$ s'écrit donc

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & f(e_j) & \cdots & f(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,p} \\
a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{i,p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,j} & \cdots & a_{n,p}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Méthode 13.7.

Pour déterminer la matrice d'une application linéaire f dans les bases $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$:

1. On calcule $f(e_j)$ pour tout $j \in [\![1; p]\!]$.
2. On exprime, pour tout entier $j \in [\![1; p]\!]$, $f(e_j)$ dans la base $(f_1, \cdots, f_n)$ en déterminant ses coordonnées dans la base.
3. On conclut en écrivant la matrice des coordonnées obtenues précédemment.

Exercice 6. — Soient $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ et $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ deux bases de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ défini par

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + y \\ x - 2y \end{pmatrix}$$

Déterminer $\text{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$.

Solution. Notons $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. On constate que $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e_2$ et $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Décomposons $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ suivant la base (e_1, e_2).

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \lambda e_1 + \mu e_2 \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -\lambda + \mu \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Après résolution, on obtient $\lambda = \frac{3}{2}$ et $\mu = -\frac{1}{2}$. Ainsi $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{2}e_2$. On obtient alors la matrice suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Proposition 13.19.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finies, de bases respectives $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$. Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$. et $u \in \mathrm{E}$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f(u)) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$

Démonstration. On écrit $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (f_1, \cdots, f_n)$. Puisque $u \in \mathrm{E}$, il existe $(u_1, \cdots, u_p) \in \mathbb{K}^p$ tels que

$$u = \sum_{j=1}^{p} u_j e_j$$

Mais alors

$$\begin{aligned} f(u) &= f\left(\sum_{j=1}^{p} u_j e_j\right) \\ &= \sum_{j=1}^{p} u_j f(e_j) \quad \text{par linéarité de } f \\ &= \sum_{j=1}^{p} u_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i \quad \text{en utilisant les notations de la définition 6} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{p} a_{ij} u_j\right) f_i \end{aligned}$$

Le coefficient de f_i dans la décomposition de $f(u)$ la base $\mathscr{B}'$ est bien la j^{ieme} colonne de $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$. □

2) Lien entre matrice et applications linéaires

Connaissant les matrices de f et g, on obtient rapidement celle de $f \circ g$ et de f^{-1} si f est bijective.

Proposition 13.20.

Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $\mathscr{B}''$ une base de G.

Soient $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et $g \in \mathscr{L}(\mathrm{F},\mathrm{G})$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g\circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g) \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)$$

Remarque 10. — Ainsi, il suffit de multiplier les matrices respectives des applications.

Proposition 13.21.

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathscr{B}$ une base de E, et $\mathscr{B}'$ une base de F. Soit f un isomorphisme de E dans F. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(f^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\right)^{-1}$$

Remarque 11. — Il y a une équivalence entre f et sa matrice dans une base. En effet, si E et F sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n, et $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont des bases respectives de E et F, alors

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F}) & \to & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f) \end{array}$$

est un isomorphisme. D'après les remarques précédentes, f est bijective si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(f)$ est inversible par exemple.

3) Changement de base

Il arrive régulièrement (et nous le verrons plus tard) qu'on souhaite changer les bases qu'on utilise sur l'espace vectoriel de départ.

Définition 7 (Matrice de passage)**.** — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_n)$ deux bases de E.
On appelle **matrice de passage** P de la base $\mathscr{B}$ vers la base $\mathscr{B}'$ la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de la base $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. Ainsi,

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})$$

Exercice 7. — Soient $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)$ et $\mathscr{B}' = \left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$ deux bases de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$ et de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Solution. On fera attention à l'ordre. On a, rapidement, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{P} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix} \text{ă}1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$, on décompose les éléments de la base $\mathscr{B}$ suivant la base $\mathscr{B}'$:

$$\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi, la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$ est :

$$\mathrm{Q} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_{\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarque 12. — Si P est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$, alors P est inversible, et P^{-1} est la matrice de passage de la base $\mathscr{B}'$ à la base $\mathscr{B}$.

Démonstration. En effet, d'après la proposition 13.21, et puisque $\mathrm{id}_\mathrm{E}^{-1} = \mathrm{id}_\mathrm{E}$, on a bien

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E}) = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E}^{-1}) = \left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_\mathrm{E})\right)^{-1}$$

□

Proposition 13.22. Formules de passage

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p. Soient $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \cdots, e'_p)$ deux bases de E. Soit P la matrice de passage de la base $\mathscr{B}$ à la base $\mathscr{B}'$. Alors

- Pour tout vecteur u de E,
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$$
- Si f est un endomorphisme de E, alors
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = \mathrm{P}^{-1} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \mathrm{P}$$

Remarque 13. — ⚠ On fera attention à l'intuition ! La matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ permet, à partir d'un vecteur u décomposé suivant $\mathscr{B}'$ d'obtenir ses coordonnées dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 8. — Soit $f : \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ l'application définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ -x + 2y \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ une base de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Donner la matrice A de f dans la base canonique, et la matrice D de f dans la base $\mathscr{B}$.
3. Donner la matrice de passage P de la base canonique dans la base $\mathscr{B}$.
4. Exprimer A en fonction de P et D, puis en déduire A^n pour tout entier n.

Solution.

1. On montre classiquement que f est linéaire, et donc, que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
2. Dans la base canonique, que l'on note $\mathscr{C}$:
$$f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$
Ainsi,
$$\mathrm{A} = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans la base $\mathscr{B}$:

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}3\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\mathrm{D}=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$$

3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathscr{B}$. Par définition

$$\mathrm{P}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}$$

4. D'après la formule de passage, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)=\mathrm{P}^{-1}\times\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f)\times\mathrm{P}$$

soit $\mathrm{D}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$, ou encore $\mathrm{A}=\mathrm{PDP}^{-1}$. Par récurrence rapide, on peut alors montrer que pour tout entier $n\geqslant 0$, $\mathrm{A}^n=\mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$. D étant diagonale, on a, pour tout entier n, $\mathrm{D}^n=\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}$, et enfin, par calcul :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3^n&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac12&-\frac12\\\frac12&\frac12\end{pmatrix}$$

et donc

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\quad \mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}\dfrac{3^n+1}{2}&\dfrac{-3^n+1}{2}\\\dfrac{-3^n+1}{2}&\dfrac{3^n+1}{2}\end{pmatrix}}$$

Remarque 14. — Ainsi, si A et B représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, il existe une matrice inversible P telle que $\mathrm{A}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$.

Définition 8. — On dit que deux matrices A et B de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont **semblables** s'il existe une matrice $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\mathrm{A}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{BP}$.

Remarque 15. — On a alors $\mathrm{B}=\mathrm{PAP}^{-1}$.

Exemple 6. — D'après l'exercice 8, les matrices $\begin{pmatrix}2&-1\\-1&2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3&0\\0&1\end{pmatrix}$ sont semblables.

4) Cas des projecteurs et symétries

Pour le cas particulier des projecteurs et symétries, on peut choisir des bases adaptées pour obtenir des matrices "agréables".

Proposition 13.23.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux supplémentaires dans E, et $p:\mathrm{E}\to\mathrm{E}$ le projecteur sur F parallèlement à G :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathrm{E} = \mathrm{F} \bigoplus \mathrm{G} & \to & \mathrm{E} \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' \end{array}$$

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F, et $(f_1 \cdots f_{n-p})$ une base de G. Notons alors $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_{n-p})$ une base de E. Dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0_{n-p} \\ 0_p & 0_{n-p} \end{pmatrix}$$

Exemple 7. — Soit p le projecteur sur $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors, dans la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, la matrice de p est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 13.24.

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F et G deux supplémentaires dans E, et $p : \mathrm{E} \to \mathrm{E}$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G :

$$\begin{array}{rcl} p : \mathrm{E} = \mathrm{F} \bigoplus \mathrm{G} & \to & \mathrm{E} \\ x = x' + x'' & \mapsto & x' - x'' \end{array}$$

Soient $(e_1, \cdots, e_p)$ une base de F, et $(f_1 \cdots f_{n-p})$ une base de G. Notons alors $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_p, f_1, \cdots, f_{n-p})$ une base de E. Dans cette base :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & 0_{n-p} \\ 0_p & -\mathrm{I}_{n-p} \end{pmatrix}$$

Exemple 8. — Soit s la symétrie par rapport à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$. Alors, dans la base $\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$, la matrice de s est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

VI. Quelques compléments

1) Trace et transposée

Définition 9. — Soit $\mathrm{A} = (a_{ij})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice. On appelle **trace** de A, et on note Tr(A), le nombre $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

> **Remarque 16.** — Ainsi, la trace d'une matrice est la somme de tous les coefficients diagonaux de celle-ci.

Exemple 9. — On a

$$\mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = 1+4=5$$

Proposition 13.25.

La fonction $\mathrm{Tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

Démonstration. Soient $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, et λ un réel. Alors $\lambda A + B = (\lambda a_{ij} + b_{ij})$. Mais alors

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}(\lambda A + B) &= \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_{ii} + b_{ii}) \\ &= \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{ii} + \sum_{k=1}^{n} b_{ii} \\ &= \lambda \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B) \end{aligned}$$

Ainsi, Tr est linéaire, et à valeur dans $\mathbb{K}$, donc est une forme linéaire. □

Proposition 13.26.

On dispose de deux résultats importants :

- Pour toutes matrices $(A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.
- Pour toutes matrices semblables A et B, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(B)$.

Démonstration. La preuve se fait par le calcul pour le premier résultat. Pour le deuxième résultat, il existe P inversible tel que $A = PBP^{-1}$. Mais alors, en utilisant le résultat précédent :

$$\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(PBP^{-1}) = \mathrm{Tr}(P^{-1}PB) = \mathrm{Tr}(B)$$

□

> **Remarque 17.** — Ce dernier résultat assure que toute matrice semblable à une même matrice ont la même trace. Cela permet de définir la trace d'un endomorphisme.

Définition 10. — Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, et $f \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **trace** de f, et on note $\mathrm{Tr}(f)$, la trace de la matrice de f dans une base de E.

Méthode 13.8.

Pour déterminer la trace d'un endomorphisme, on détermine sa matrice dans une base (par exemple, la base canonique) et on calcule la trace de cette matrice.

Exercice 9. — Déterminer la trace de l'endomorphisme f de l'exercice 8.

Solution. Dans l'exercice 8, la matrice de f dans la base canonique est $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Ainsi,

$$\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = 4$$

Remarque 18. — Si on prend la matrice dans la base $\mathscr{B}$, on obtient bien évidemment la même trace.

2) Formule du rang

Définition 11. — Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. On appelle **rang** de f la dimension de son image :

$$\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}\,(f))$$

Remarque 19. — Puisque Im (f) est un sous-espace vectoriel de F, il est de dimension finie (car F l'est) et $\mathrm{rg}(f) \leqslant \dim(F)$.

Théorème 13.27. Théorème du rang

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie, et $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f))$$

Démonstration. L'idée : on prend une base $(e_1,\dots,e_p)$ de Ker(f), qui existe puisqu'on est en dimension finie. On complète cette base en une base $(e_1,\dots,e_p,e_{p+1},\dots,e_n)$ de E. Mais alors, puisque $f(e_1) = f(e_2) = \dots = f(e_p) = 0$, la famille $(f(e_{p+1}),\dots,f(e_n))$ est une famille génératrice de $\Im(f)$, et on peut montrer qu'elle est libre : c'est donc une base de Im (f). Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = p$, $\dim(\mathrm{Im}\,(f)) = n-p$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) + \dim(\mathrm{Im}\,(f)) = n = \dim(E)$. □

Exercice 10. — On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $f \in \mathscr{L}(E,F)$. Que dire de f si :

1. $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$?
2. $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$?

Solution.

1. Si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$, puisque Im (f) est un sous-espace vectoriel de F, et qu'ils ont même dimension, on en déduit que Im $(f) = F$. Ainsi, f est surjective.
2. D'après la formule du rang, $\dim(E) = \dim(E) + \dim(\mathrm{Ker}(f))$, et donc $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$, c'est-à-dire $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$. Ainsi, f est injective.

Remarque 20. — En utilisant l'isomorphisme $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}$ vu précédemment, on peut également également voir le rang d'une matrice M comme étant le rang de l'application linéaire dont la matrice dans une base est M.

Proposition 13.28.

Soit $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Le rang de M peut être vu comme

- le rang du système $MX = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ la matrice des inconnues.
- le rang de la famille $(C_1, \cdots, C_p)$ des colonnes de la matrice $M : C_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix}$.
- le rang de l'application linéaire $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$ définie par $\forall\, X \in \mathbb{K}^p, \quad f(X) = MX$.

Méthode 13.9.

Pour déterminer le rang d'une matrice ou d'une famille de vecteurs, on résout le système de la forme $MX = 0$ associé. Le rang de ce système (c'est-à-dire le nombre de pivot non nul) est égal au rang de la matrice ou de la famille associée.

Exemple 10. — Déterminer le rang de la famille $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

Solution. On résout le système

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & - & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \end{array} \right.$$

Ce système est de rang 2 (car les trois dernières lignes sont les mêmes). Ainsi,

$$\mathrm{rg}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 2$$

Exercices

Exercices classiques

Exercice 11. — Soit a un réel, et $\mathrm{E}_a = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}), \quad x+y+z=a \right\}$. Soit $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ l'application par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ x-y \end{pmatrix}$$

1. A quelle condition sur a l'espace E_a est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$?
2. Démontrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
3. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$. En déduire le rang de f. L'application f est-elle injective ? surjective ?
4. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{E}_0$.
5. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \bigoplus \mathrm{Ker}(f) = \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 12 (ATS 2014). — Soit $f : \mathbb{R}_4[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$ définie par

$$f : \mathrm{P}(\mathrm{X}) \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}) - \mathrm{X}\mathrm{P}'(\mathrm{X})$$

1. Vérifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_4[\mathrm{X}]$.
2. Donner la matrice de f dans une base au choix, que l'on précisera.
3. Donner une base du noyau de f.
4. Donner la dimension et une base de l'image de f.

Exercice 13 (Endomorphisme et matrice). — On se donne une matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et les vecteurs

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, et $\mathscr{B}' = (f_1, f_2, f_3)$. On note enfin f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ dont la matrice est A dans la base canonique.

1. Montrer que $\mathscr{B}'$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathscr{B}'$.
3. Donner une base de l'image et du noyau de f.

Exercice 14 (Projecteur). — Soient $f : \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \to \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définie par $f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ -x+2y-2z \\ -x+y-z \end{pmatrix}$.

Soient $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base du noyau de f. f est-elle injective ?
3. Déterminer la dimension de $\mathrm{Im}\,(f)$. f est-elle surjective ?
4. Démontrer que $\mathrm{Im}\,(f) = \mathrm{Vect}(f_1, f_2, f_3)$.
5. Déterminer alors une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.
6. Prouver que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}) = \mathrm{Im}\,(f)$.
7. Montrer que pour tout $u \in \mathrm{Im}\,(f)$, $f(u) = u$. Montrer alors que pour tout $(u, v) \in \mathrm{Im}\,(f) \times \mathrm{Ker}(f)$, $f(u+v) = u$.
8. En déduire alors que $f \circ f = f$. On dit que f est le projecteur, sur $\mathrm{Im}\,(f)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 15. — Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3x + y - z \\ -x + 5y - 3z \\ 4y - 2z \end{pmatrix}$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et préciser sa matrice A dans la base canonique $\mathscr{C}$ de $\mathbb{R}^3$.
2. Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer la matrice B de l'application linéaire f dans la base $\mathscr{B}$.

Recherche

Exercice 16 (*). — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et f un endomorphisme de E. Montrer que $\mathrm{Im}\,(f) \subset \mathrm{Ker}(f) \Leftrightarrow f \circ f = 0$.

Exercice 17. — On considère le système différentiel

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcl} x'(t) & = & -7x(t) - 9y(t) \\ y'(t) & = & 6x(t) + 8y(t) \end{array} \right.$$

On pose $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

1. On note $\mathrm{X}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{AX}(t)$ où A est une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ à déterminer.
2. On note f l'endomorphisme associé à A dans la base canonique de $\mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$. Déterminer $f(u)$ et $f(v)$. En déduire la matrice D de f dans la base (u, v).
3. Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (u, v). Démontrer que

$$\mathrm{X}' = \mathrm{AX} \Leftrightarrow \mathrm{Y}' = \mathrm{DY} \text{ où } \mathrm{Y} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}$$

4. Résoudre $\mathrm{Y}' = \mathrm{DY}$, et en déduire les solutions du système (S).