CHAPITRE 14

DÉRIVABILITÉ

Résumé

Dans ce chapitre, on (re)définit rigoureusement la notion de nombre dérivé et de fonction dérivée. On utilise ensuite celle-ci pour l'étude de fonctions (variation), et pour obtenir de jolis résultats (théorème de Rolle, égalité et inégalités des accroissements finis).

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la notion de dérivabilité :

- Savoir montrer qu'une fonction est dérivable en un point en utilisant le taux d'accroissement . . . . □
- Savoir démontrer qu'une fonction est dérivable par produit, quotient, composée . . . . □
- Savoir déterminer l'équation d'une tangente à une courbe en un point . . . . □

② Savoir utiliser les formules de dérivation :

- savoir déterminer la dérivée d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée. . . . . □
- savoir utiliser la formule de Leibniz pour déterminer la dérivée n-ième d'un produit de fonctions . . . . □
- savoir déterminer la dérivée en un point d'une fonction réciproque . . . . □

③ Savoir utiliser le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$ pour montrer qu'une fonction est dérivable en un point . . . . □

④ Concernant les applications :

- savoir utiliser le théorème de Rolle pour démontrer que la dérivée d'une fonction s'annule . . . □
- utiliser l'égalité des accroissements finis et l'inégalité des accroissements finis . . . . □
- connaître le lien entre signe de la dérivée et monotonie d'une fonction . . . . □

⑤ Savoir étudier complètement une fonction (tableau de variations, comportement asymptotique) . □

I. Dérivabilité en un point

1) Définition

Définition 1. — Soient $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ un intervalle, $x_0 \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f est **dérivable** en x_0 si la fonction

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

appelée **taux d'accroissement** de f en x_0, admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est alors appelée **nombre dérivé** de f en x_0, et est notée $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Remarque 1. — En posant $h = x - x_0$, et sous réserve d'existence, on a également

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Méthode 14.1.

Pour montrer qu'une fonction f est dérivable en x_0, on détermine le taux d'accroissement

$$\tau_{x_0} : x \mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

et on cherche sa limite en x_0. Si la limite est finie et vaut a, la fonction f est dérivable en x_0, et $f'(x_0) = a$.

Exemple 1. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Montrer que f est dérivable en 1.

Solution. Déterminer le taux d'accroissement :

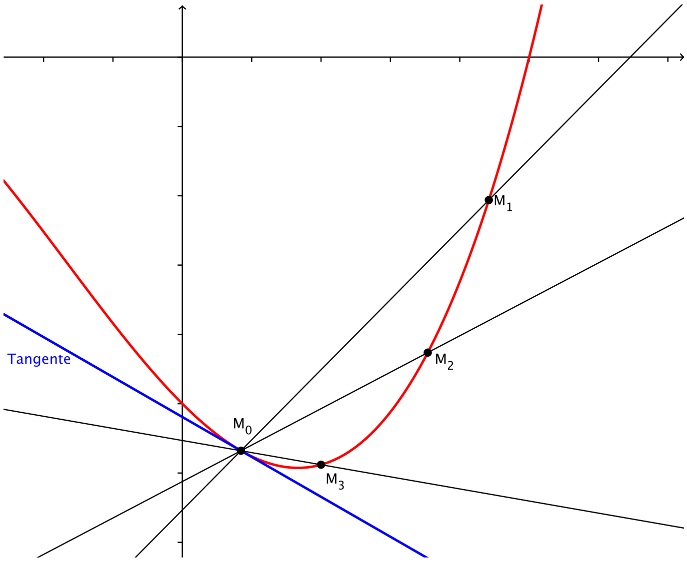
$$\tau_1(x) = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 \xrightarrow{x \to 1} 2$$

Donc f est dérivable en 1, et $f'(1) = 2$.

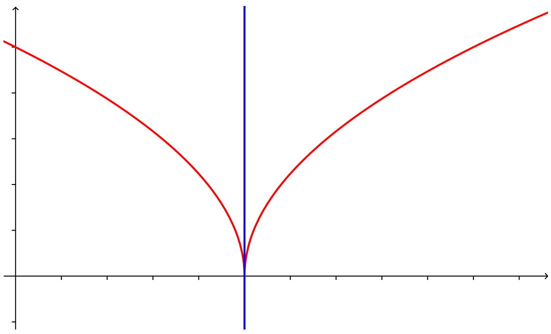
2) Interprétation géométrique

Si on note M_0 le point de coordonnées $(x_0, f(x_0))$ et M le point de coordonnées $(x, f(x))$, alors le taux d'accroissement $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ représente le coefficient directeur de la droite $(\mathrm{M}_0\mathrm{M})$. Ainsi :

- Si f est dérivable en x_0, la famille de droites $(\mathrm{M}_0\mathrm{M})$ admet une position limite lorsque x tend vers x_0 : la droite passant par M_0 et de coefficient directeur $f'(x_0)$. Cette droite est appelée **tangente** en M_0 à la courbe de f.



- Si la limite du taux d'accroissement est infinie, la courbe de f possède en x_0 une **tangente verticale** au point M_0, d'équation $x = x_0$.



Remarque 2. — Si f est dérivable en x_0, la courbe de f admet donc une tangente en $M_0(x_0, f(x_0))$ d'équation

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Exemple 2. — Puisque la fonction carrée est dérivable en $x_0 = 1$, alors sa courbe représentative admet au point $M_0(1,1)$ une tangente, d'équation $y = 2(x-1)+1 = 2x-1$.

3) Développement limité d'ordre 1

Supposons la fonction $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable au point d'abscisse $x_0 \in I$. Alors, la fonction ε, définie par

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(x_0) - (x - x_0)f'(x_0)}{x - x_0}$$

est bien définie au voisinage de x_0, et est de limite nulle.

Définition 2. — Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en x_0. Alors, au voisinage de x_0, on peut écrire

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

où ε est de limite 0 en x_0.

Cette écriture est appelé **développement limité** à l'ordre 1 en x_0 de la fonction f. On le notera également

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + o_{x_0}(x - x_0)$$

Remarque 3. — Si f est dérivable en x_0, alors elle admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0. Réciproquement, si f admet un développement limité à l'ordre 1 en x_0 de la forme

$$f(x) = f(x_0) + a(x - x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$$

avec ε de limite nulle en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = a$.

Exemple 3. — La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ admet un développement limité en 1 et

$$f(x) = f(1) + (x-1)f'(1) + (x-1)\varepsilon(x) = 1 + 2(x-1) + (x-1)\varepsilon(x) = \underbrace{2x-1}_{\text{eq. de la tangente}} + (x-1)\varepsilon(x)$$

4) Dérivabilité et continuité

La notion de dérivabilité en un point est plus forte que la continuité. En effet :

Théorème 14.1.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.

Démonstration. Si f est dérivable en x_0, on peut donc écrire, au voisinage de x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x_0)$$

En faisant tendre x vers x_0, on obtient alors

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Donc f est bien continue en x_0. □

Remarque 4. — ⚠ Une fonction peut être continue en un point, sans être dérivable. Par exemple, la fonction racine est continue en 0. Pourtant, elle n'est pas dérivable en 0. En effet

$$\tau_0(x) = \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \to 0} +\infty$$

5) Dérivabilité à droite et à gauche

Puisqu'on dispose de limites à droite et à gauche, on peut également s'intéresser à la dérivabilité à droite et à gauche en un point.

Définition 3. — Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière (*pour pouvoir parler de limite à droite et à gauche*).

- On dit que f est **dérivable à droite** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à droite* en x_0. Dans ce cas, on note

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

- On dit que f est **dérivable à gauche** en x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite *à gauche* en x_0. Dans ce cas, on note

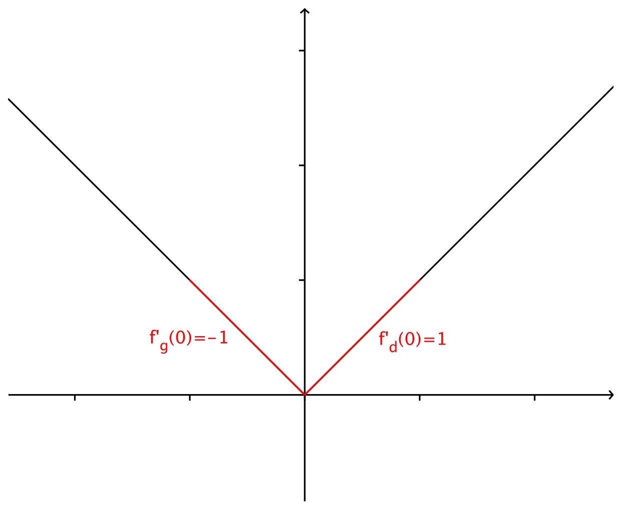
$$f'_g(x_0) = \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

On dispose du même théorème que pour les limites :

Théorème 14.2.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction, et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière de I. Alors f est dérivable en x_0 si et seulement si f est dérivable à droite et à gauche en x_0 **et** $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.
Dans ce cas, $f'(x_0) = f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$.

Remarque 5. — Une fonction peut être dérivable à droite et à gauche en un point, sans que $f'_d(x_0)$ soit égal à $f'_g(x_0)$. Dans ce cas, la courbe admet des **demi-tangentes**. Par exemple, si $f : x \mapsto |x|$, f admet une dérivée à droite en 0 (qui vaut $f'_d(0) = 1$) et une dérivée à gauche en 0 (qui vaut $f'_g(0) = -1$)).



Les nombres dérivés à droite et à gauche étant distincts, la fonction n'est pas dérivable en 0.

Remarque 6. — Si la fonction f n'admet ni dérivée à droite ni à gauche en x_0, mais que

$$\lim_{x \to (x_0)^{-/+}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = (+/-)\infty$$

alors la courbe de f admet une **demi-tangente verticale** au point d'abscisse x_0.

Exemple 4. — La fonction racine admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

6) Nombre dérivé et extremum

Théorème 14.3.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction et $x_0 \in \mathrm{I}$ qui n'est pas à la frontière de I. On suppose que f est dérivable en

x_0. Si f admet un extremum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$.

Démonstration. Supposons que f admette un maximum en x_0. Alors, sur un intervalle J autour de x_0, on a $f(x) \leqslant f(x_0)$. Mais alors :

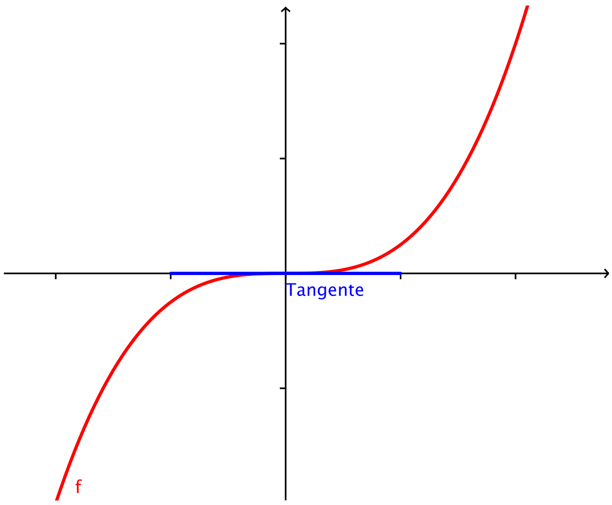
- Pour $x < x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) \geqslant 0$.
- Pour $x > x_0$, $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant 0$. Par passage à la limite, puisque f est dérivable en x_0, on a $f'(x_0) = f'_d(x_0) \leqslant 0$.

Et donc $f'(x_0) = 0$. □

Remarque 7. — Ainsi, si f est dérivable en x_0 et admet un extremum local, alors la tangente y est **horizontale**.

Remarque 8. —

- ⚠ La réciproque n'est pas vraie : si $f'(x_0) = 0$, cela n'implique pas nécessairement que f admet un extremum local en x_0. Par exemple, si $f : x \mapsto x^3$, alors $f'(0) = 0$, et pourtant 0 n'est pas un extremum local de f.



- ⚠ Le théorème précédent n'est valable que pour tout point en dehors de la frontière de I. Ainsi, une fonction peut admettre un extremum local sans pour autant que la dérivée en ce point soit nulle : dans ce cas, elle admet son extremum local en une borne de l'intervalle.

II. Dérivabilité sur un intervalle

1) Fonction dérivée

Définition 4. — Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On dit que f est **dérivable** sur I si f est dérivable en tout point de I. Sa fonction dérivée est alors notée $f' : x \mapsto f'(x)$ ou $\frac{df}{dx} : x \mapsto \frac{df}{dx}(x)$.

Notation 1. — On dit que f est de classe $\mathscr{D}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{D}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (et on note $f \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})$) si f est **dérivable** sur I, et si sa **dérivée** f'

est **continue** sur I.

2) Dérivées des fonctions usuelles

Théorème 14.4.

On dispose des dérivées usuelles suivantes :

$\mathscr{D}_f$	$f(x) =$	dérivable sur	$f'(x) =$
$\mathbb{R}$	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^*$	x^n $(n < 0)$	$\mathbb{R}^*$	nx^{n-1}
$\mathbb{R}^{+*}$	x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\mathbb{R}$	a^x $(a > 0)$	$\mathbb{R}$	$\ln(a)a^x$
$\mathbb{R}^+$	$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	e^x	$\mathbb{R}$	e^x
$\mathbb{R}^{+*}$	$\ln x$	$\mathbb{R}^{+*}$	$\dfrac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$
$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$	$\tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi; \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ $(k \in \mathbb{Z})$	$1+\tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$
$[-1;1]$	$\arcsin(x)$	$]-1;1[$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$[-1;1]$	$\arccos(x)$	$]-1;1[$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\mathbb{R}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x)$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh}(x)$	$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch}(x)$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{th}(x)$	$\mathbb{R}$	$1-\operatorname{th}^2(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2(x)}$

Démonstration. Démontrons la première ligne du tableau. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \mapsto x^n$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Notons T le taux d'accroissement en x_0. On a donc

$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}$$

- Premier cas : $x_0 = 0$. Dans ce cas $\mathrm{T}(x) = x^{n-1} \xrightarrow{x \to x_0} 0 = n \times 0^{n-1}$.
- Deuxième cas : $x_0 \neq 0$. Dans ce cas, on peut écrire :

$$\mathrm{T}(x) = \frac{(x - x_0)(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1})}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \cdots + x_0^{n-1}$$

Il y a n termes dans la somme, et chaque terme tend vers x_0^{n-1} lorsque x tend vers x_0. Donc

$$\lim_{x \to x_0} \mathrm{T}(x) = n \times x_0^{n-1}$$

□

3) Opérations sur les dérivées

Théorème 14.5.

Soient f et g deux fonctions dérivables en x_0. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors :

- $f+g$ et λf sont dérivables en x_0, et on a $(f+g)'(x_0) = f'(x_0)+g'(x_0)$ et $(\lambda f)'(x_0) = \lambda f'(x_0)$ (*linéarité de la dérivation*)
- $f \times g$ est dérivable en x_0, et on a
$$(f\times g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
- Si g ne s'annule pas en x_0, $\frac{f}{g}$ est dérivable en x_0, et on a
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

Remarque 9. — Ainsi, si f et g sont dérivables sur I, on a $(f+g)' = f'+g', (\lambda f)' = \lambda f', (f\times g)' = f'g+fg'$ et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

Démonstration. Montrons le deuxième point. Notons T le taux d'accroissement de $f\times g$ en x_0. On a donc
$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0}$$
et donc
$$\mathrm{T}(x) = \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \frac{f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}g(x) + f(x_0)\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$$
Puisque f est dérivable en x_0
$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$
Puisque g est dérivable en x_0, g est continue en x_0. On a donc
$$\lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) \text{ et } \lim_{x\to x_0} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = g'(x_0)$$
Par somme et produit des limites, on a donc
$$\lim_{x\to x_0} \mathrm{T}(x) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$$
Les autres se font de la même manière. □

Théorème 14.6.

Soient $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ deux fonctions telles que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$ (pour pouvoir composer les fonctions). Si f est dérivable en x_0, et g est dérivable en $f(x_0)$, alors $g\circ f$ est dérivable en x_0, et on a
$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \times f'(x_0)$$

Remarque 10. — Ainsi, si f et g sont dérivables respectivement sur I et J, alors $g\circ f$ est dérivable sur I, et on a $(g\circ f)' = g'\circ f \times f'$.

Remarque 11. — ⚠On fera attention à bien justifier la dérivabilité d'une fonction composée

Exemple 5. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie pour tout x par $f(x) = \ln(x^2+1)$. Démontrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée.

Solution. La fonction $x \mapsto x^2+1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $[1;+\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$. Comme la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$$

Proposition 14.7. Composées particulières

Soit u une fonction dérivable sur I.

- Pour tout entier $n > 0$, la fonction u^n est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
- e^u est dérivable sur I, et sa dérivée est $(e^u)' = u'e^u$.
- $\cos(u)$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\cos(u))' = -u'\sin(u)$.
- $\sin(u)$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\sin(u))' = u'\cos(u)$.
- Si u est strictement positive sur I, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.
- Si u est strictement positive sur I, u^α est dérivable sur I, et sa dérivée est $(u^\alpha)' = \alpha u'u^{\alpha-1}$.
- Si u est strictement positive sur I, $\ln u$ est dérivable sur I, et sa dérivée est $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$.

Exemple 6. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f'.

Solution. Puisque $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (polynôme), par composée, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et

$$\forall\ x \in \mathbb{R},\ f'(x) = -2xe^{-x^2}$$

4) Dérivée d'une fonction réciproque

Théorème 14.8.

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une fonction bijective, et soit $f^{-1} : f(\mathrm{I}) \to \mathrm{I}$ sa fonction réciproque. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. On suppose que f est dérivable en x_0.

- Si $f'(x_0) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et on a

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

- Si $f'(x_0) = 0$, alors f^{-1} n'est pas dérivable en $y_0 = f(x_0)$, et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.

Méthode 14.2.

Pour montrer que f^{-1} est dérivable en réel y_0 :

- On écrit $y_0 = f(x_0)$ (soit $x_0 = f^{-1}(y_0)$) et on montre que f est dérivable en x_0.
- On s'assure que $f'(x_0) \neq 0$.

On peut alors conclure que f^{-1} est dérivable en y_0, et que

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Exercice 1. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-x^2}$$

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ sur $]0;1[$.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer sa fonction dérivée.

Solution.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables, et pour tout réel x,
$$f'(x) = -2xe^{-x^2}$$
Pour tout $x > 0$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, par composée,
$$\lim_{x\to 0} f(x) = e^0 = 1 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$
f étant dérivable sur $\mathbb{R}$, elle est a fortiori continue sur $\mathbb{R}_+^*$. D'après le théorème de la bijection, f est bijective de $]0;+\infty[$ sur $f(]0;+\infty[) =]0;1[$.
2. Remarquons que
$$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 = \ln(2) \Leftrightarrow x = \sqrt{\ln(2)} \text{ car x>0}$$
Or f est dérivable en $\sqrt{\ln(2)}$ et
$$f'\left(\sqrt{\ln(2)}\right) = -2\sqrt{\ln(2)}e^{-(\sqrt{\ln(2)})} = -2\sqrt{\ln(2)}e^{-\ln(2)} \neq 0$$
Ainsi, f^{-1} est dérivable en $\frac{1}{2}$ et
$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{-2\sqrt{\ln(2)}e^{-\ln(2)}}$$
3. Soit $y \in]0;1[$. De la même manière,
$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{-x^2} = y \Leftrightarrow -x^2 = \ln(y) \Leftrightarrow x = \sqrt{-\ln(y)}$$
(qui a bien un sens car $y \in]0;1[$ donc $-\ln(y) > 0$). Or, f est dérivable en $\sqrt{-\ln(y)}$ et
$$f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right) = -2\sqrt{-\ln(y)}e^{-(\sqrt{-\ln(y)})} = -2\sqrt{-\ln(y)}e^{\ln(y)} = -2y\sqrt{-\ln(y)} \neq 0$$

Donc f^{-1} est dérivable sur $]0;1[$ et

$$f'(y) = \frac{1}{f'\left(\sqrt{-\ln(y)}\right)} = \frac{1}{-2y\sqrt{-\ln(y)}}$$

Remarque 12. —

- Dans l'exercice précédent, on a en réalité montré que

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{-\ln(y)}$$

Ainsi $f^{-1} :]0;1[\to \mathbb{R}$ est définie par,

$$\forall\ y \in]0;1[, f^{-1}(y) = \sqrt{-\ln(y)}$$

On peut donc remarquer que f^{-1} est bien dérivable sur $]0;1[$ par composée, et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{-\frac{1}{y}}{2\sqrt{-\ln(y)}}$$

- Si la dérivée f' ne s'annule jamais, la fonction f^{-1} est donc toujours dérivable. Dans l'exercice précédent, f' était toujours strictement négative sur $\mathbb{R}_+^*$.

5) Théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$

Théorème 14.9.

Soit I un intervalle, et $x_0 \in$ I. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que :

- f est continue sur I.
- f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathrm{I}\backslash\{x_0\}$.
- f' admet une limite finie l lorsque x tend vers x_0.

Alors f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et on a $f'(x_0) = l$.

Remarque 13. — Ce théorème est très fort, puisqu'il permet de conclure que f est dérivable en x_0 sans avoir à étudier la dérivabilité en tant que telle. Il suffit d'étudier la limite de la dérivée.

Méthode 14.3.

Pour montrer qu'une fonction définie par morceaux est de classe $\mathscr{C}^1$, on utilisera très souvent le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$:

- on montre que f est continue sur I.
- on montre que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I sauf en un (ou plusieurs) points.
- on montre que f' admet des limites finies aux points où elle n'apparait pas dérivable.

On conclut alors qu'elle est bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

Exemple 7. — Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est de classe

$\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. f est bien continue sur $\mathbb{R}$. En effet, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (composée de deux fonctions continues), et par composée,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0+} f(x) = 0 = f(0)$$

De plus, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et sa dérivée est donnée pour tout $x \neq 0$ par

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$$

qui est bien continue sur $\mathbb{R}^*$: f est donc bien de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.
Enfin, en posant $\mathrm{X} = \frac{1}{x^2}$, on a

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{\mathrm{X}\to+\infty} 2\mathrm{X}^{3/2}\mathrm{e}^{-\mathrm{X}} = 0$$

par croissance comparée.
Bilan : d'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(0) = 0$.

6) Dérivées successives

Définition 5. — Soit I un intervalle.

- On dit que f est **deux fois dérivables** si f et f' sont dérivables. Dans ce cas, on note f'' ou $f^{(2)}$ la dérivée de f'.
- Plus généralement, on dit que f est ***n* fois dérivables** ($n \geqslant 1$) si, pour tout entier $p \leqslant n-1$, $f^{(p)}$ est dérivable. On note alors $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$.

Définition 6. — Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur I si f est n fois dérivable, et si pour tout $p \leqslant n$, $f^{(p)}$ est continue.

Remarque 14. — D'après un théorème précédent, pour montrer qu'une fonction est de classe $\mathscr{C}^n$, il suffit de montrer que f est n fois dérivable, et que sa dérivée n-ième est continue.

Définition 7. — Soit I un intervalle. On dit que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ si f est indéfiniment dérivable, et si toutes ses dérivées sont continues.

Remarque 15. — Toutes les fonctions usuelles (exponentielle, ln, polynômes) sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur leur domaine de définition.

7) Formule de Leibniz

On dispose d'une formule agréable pour dériver n fois le produit de deux fonctions dérivables n fois :

Théorème 14.10. Formule de Leibniz

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et f, g deux fonctions n fois dérivables sur I. Alors $f \times g$ est également n fois dérivable, et on a

$$(f \times g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$$

Démonstration. Cette formule se démontre facilement par récurrence, et rappelle la démonstration de la formule du binôme de Newton. □

Exemple 8. — Déterminer la dérivée n-ième de $f : x \mapsto x^2 e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

Solution. Posons $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto e^{-x}$. Alors u et v sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $u' : x \mapsto 2x$, $u^{(2)} : x \mapsto 2$ et pour $k \geqslant 3$, $u^{(k)} : x \mapsto 0$. f est donc $\mathscr{C}^\infty$ et d'après la formule de Leibniz, pour $n \geqslant 3$:

$$\begin{aligned} f^{(n)} : x \quad \mapsto \quad & \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) \\ = \quad & \binom{n}{0} u(x) v^{(n)}(x) + \binom{n}{1} u'(x) v^{(n-1)}(x) + \binom{n}{2} u''(x) v^{(n-2)}(x) + \underbrace{\sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x)}_{=0} \\ = \quad & x^2(-1)^n e^{-x} + n2x(-1)^{n-1} e^{-x} + \frac{n(n-1)}{2} 2(-1)^{n-2} e^{-x} \\ = \quad & (-1)^n e^{-x} \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right) \end{aligned}$$

résultat encore valable pour $n = 0, 1$ et 2.
Bilan : pour tout entier n, et pour tout réel x :

$$f'(x) = (-1)^n e^{-x} \left(x^2 - 2nx + n(n-1)\right)$$

III. Application de la dérivation

1) Dérivée nulle sur un intervalle

Théorème 14.11.

Soit I un intervalle fermé, ouvert, ou semi-ouvert de bornes $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, et dérivable sur $]a; b[$. Alors

$$f \text{ est constante sur I} \Leftrightarrow \forall\, x \in]a; b[,\ f'(x) = 0$$

Remarque 16. — ⚠ Si I n'est pas un intervalle, le résultat est faux! Par exemple, si $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f(x) = -\pi$ sur $]-\infty; 0[$, et $f(x) = \sqrt{2}$ si $x > 0$, alors f vérifie les conditions de l'hypothèse, sans pour autant que f soit constante.

Conséquence 1. — Soient f et g deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et $a \in \mathrm{I}$. On suppose que $f(a) = g(a)$. Alors

$$f' = g' \text{ sur I} \Leftrightarrow f = g \text{ sur I}$$

2) Théorème de Rolle et égalité des accroissements finis

Théorème 14.12. Théorème de Rolle

Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$, vérifiant $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Démonstration. Soit la fonction f est constante sur $[a;b]$, et dans ce cas, n'importe quel réel $c \in]a;b[$ convient. Soit f n'est pas constante. f étant continue sur $[a;b]$, elle y est bornée et atteint ses bornes, et un de ces extrema M n'est pas atteint en a et en b. Supposons que M soit un maximum, atteint en un réel $c \in]a;b[$. Notons alors g la fonction définie sur $]a;b[$ par

$$g(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

$f(c)$ étant le maximum, $f(x) - f(x)$ est toujours négatif. Puisque f est dérivable sur $]a;b[$, on a :

- Si $x > c$, $x - c > 0$ et donc $g(x) < 0$. En faisant tendre x vers c par valeurs positives, on en déduit

$$\text{ă} \lim_{x \to c^+} g(x) = f'(c) \leqslant 0$$

- De même, si $x < c$, $x - c < 0$ et donc $g(x) > 0$. En faisant tendre x vers c par valeurs négatives, on en déduit

$$\text{ă} \lim_{x \to c^-} g(x) = f'(c) \geqslant 0$$

Ainsi, $f'(c) = 0$. □

Théorème 14.13. Égalité des accroissements finis

Soient $a < b$ deux réels. Soit f une fonction continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. Alors il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Démonstration. Notons g la fonction définie sur $[a;b]$ par

$$g(x) = f(x) - \frac{x - a}{b - a}((f(b) - f(a))$$

g est continue sur $[a;b]$, dérivable sur $]a;b[$. De plus, $g(a) = g(b) = f(a)$. D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $g'(c) = 0$. Or,

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

ce qui donne le résultat. □

> **Remarque 17.** — L'égalité des accroissements finis signifie, géométriquement, que lorsqu'on se donne une corde tirée entre deux points de la courbe de f, il existe une tangente à la courbe de f située entre ces deux points qui est parallèle à la sécante.

> **Remarque 18.** — Physiquement, on peut interpréter en cinétique. En effet, l'égalité des accroissements finis indique que si un objet dispose lors d'un trajet d'une vitesse moyenne v, il existe un instant t en lequel la vitesse instantanée vaut v.

3) Monotonie et signe de la dérivée

Théorème 14.14.

Soit I un intervalle de bornes a et b. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I, dérivable sur $]a;b[$.

- f est croissante (respectivement décroissante) sur I si et seulement si pour tout x de $]a;b[$, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$)).
- f est strictement croissante (respectivement strictement décroissante) sur I si et seulement si f' est strictement positive sur $]a;b[$ (resp. strictement négative) **sauf éventuellement en un nombre fini de réels** où f' s'annule.

Exemple 9. — L'exemple classique est celui de la fonction cube : soit $f : x \mapsto x^3$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 3x^2$. f' est strictement positive sauf pour $x = 0$. D'après le théorème, la fonction f est tout de même strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Méthode 14.4.

Pour étudier les variations d'une fonction (quand ce n'est pas une fonction classique) :

- on justifie que la fonction est bien dérivable,
- on déterminer la dérivée de la fonction,
- on détermine le signe de la dérivée, avant de conclure.

Exemple 10. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x$. Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que polynôme, et on a pour tout réel x, $f'(x) = 3x^2 + 3$. Or, pour tout réel x, $f'(x) > 0$: ainsi la fonction f est strictement croissante.

4) Inégalité des accroissements finis

Théorème 14.15.

Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$, continue sur $[a;b]$, et dérivable sur $]a;b[$. On suppose qu'il existe deux réels m et M tels que,

$$\forall\ x \in]a;b[,\ m \leqslant f'(x) \leqslant \mathrm{M}$$

Alors on a

$$m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

ou encore

$$m \leqslant \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leqslant \mathrm{M}$$

Démonstration. Démontrons l'une des inégalités, par exemple $f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$. Pour cela, on introduit la fonction $g : [a;b] \to \mathbb{R}$, définie pour tout x de $[a;b]$ par $g(x) = f(b) - f(x) - \mathrm{M}(b-x)$. g est dérivable sur $]a;b[$ comme somme de fonctions dérivables, et on a

$$\forall\ x \in]a;b[, g'(x) = -f'(x) + \mathrm{M} \geqslant 0$$

Donc g est croissante sur $[a;b]$. Ainsi, pour tout $x \in [a;b], g(x) \leqslant g(b) = 0$. On a donc bien, en particuler $g(a) \leqslant 0$. □

Conséquence 2. — Soit f est une fonction dérivable sur I. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que
$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ |f'(x)| \leqslant \mathrm{C}$$
Alors
$$\forall\, (a,b) \in \mathrm{I}^2,\ \ |f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{C}|b-a|$$

Méthode 14.5.

L'inégalité des accroissements finis permet d'obtenir des inégalités intéressantes, en introduisant la bonne fonction.

Exemple 11. — Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}$$

Solution. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f : [n; n+1] \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x \in [n; n+1]$ par $f(x) = \ln(x)$. Alors f est dérivable sur $[n; n+1]$, et on a
$$\frac{1}{n+1} \leqslant f'(x) = \frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{n}$$
D'après l'inégalité des accroissements finis, on a donc
$$\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}(n+1-n) \leqslant \ln(n+1) - \ln(n) \leqslant \frac{1}{n}(n+1-n) = \frac{1}{n}$$

5) Nombre dérivé et extrema locaux

Nous avons vu que si $f'(x) = 0$, cela n'implique pas forcément qu'il y ait un extremum local en x. On dispose cependant du théorème suivant :

Théorème 14.16.

Soit I un intervalle, et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Soit $x_0 \in \mathrm{I}$. Si f' s'annule en x_0 **en changeant de signe**, alors f admet un extremum local en x_0.

Exemple 12. — Dans le cas de la fonction cube, $f'(0) = 0$ mais la dérivée reste positive.

IV. Exercices bilans

Exercice 2. — On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ \frac{x}{\ln(1+x)} & \text{si } x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par
$$u_0 = e \text{ et } \forall\ n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

1. Déterminer le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0;+\infty[$. En déduire que, pour tout entier naturel n, (u_n) existe.
2. Ecrire une fonction Scilab qui, pour une valeur N fournie par l'utilisateur, calcule et affiche u_N.
3. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
4. Etablir que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et déterminer $f'(x)$ pour $x\in]0;+\infty[$.
5. Montrer que, pour $x\in]0;+\infty[$, $f'(x)$ peut s'écrire
$$\forall\ x>0,\ \ f'(x)=\frac{\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}+\frac{1}{1+x}}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right)^2}$$
6. En utilisant le résultat $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+x)-x}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$ que l'on admettra, montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0;+\infty[$, et déterminer $f'(0)$.
7. Etablir que
$$\forall\ x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f(x)\leqslant x \text{ et } (x+1)\ln(x+1)\geqslant x+1$$
En déduire que
$$\forall\ x\geqslant \mathrm{e}-1,\ f'(x)\geqslant 0$$
8. Démontrer que
$$\forall\ n,\ \mathrm{e}-1\leqslant u_n$$
9. Etablir que la suite (u_n) converge, et déterminer sa limite.

Solution.

1. Pour tout réel $x>0$, $x+1>1$ donc $\ln(x+1)>\ln(1)=0$ par stricte croissance de la fonction ln. Par quotient, $f(x)>0$ si $x>0$. Ainsi, on a $f(]0;+\infty[)\subset]0;+\infty[$.
Montrons alors, par récurrence, la proposition P définie pour tout entier n par P_n : "u_n existe et $u_n>0$".
   - Pour $n=0$, u_0 est bien défini, et $u_0=\mathrm{e}>0$. P_0 est donc vraie.
   - Supposons que la proposition P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, par hypothèse de récurrence, u_n existe et $u_n>0$. Mais alors, d'après ce qui précède, $f(u_n)$ existe (car $u_n>0$) et $f(u_n)>0$ puisque la fonction f est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc u_{n+1} existe et $u_{n+1}>0$: P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien définie.
2. La suite étant définie par une relation $u_{n+1}=f(u_n)$, on peut utiliser une boucle *for* pour calculer u_N.

Programme Scilab 1 : Calcul d'un terme d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 10/02/2016
// Résumé : calcul de u_N dans le cas d'une suite u_(n+1)=f(u_n)
//          avec f:x -> x/ln(1+x)

// Rang voulu :
N = 5

// Valeur de u_0 :
U = exp(1)

// Boucle pour calculer u_N
for i=1:N
    U = U / log(1+U) // Rappel : la fonction ln s'écrit log en Scilab
end

// Affichage de la valeur de u_N
disp("U = ", U)
```

3.

4.

5.

6.

La fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}^+$, de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)$ admet une limite en 0. D'après le théorème de prolongement $\mathscr{C}^1$, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$, et $f'(0)=\frac{1}{2}$.

7. Si $x \geqslant e-1$, alors $1+x \geqslant e$ et donc, par stricte croissance de la fonction ln sur $\mathbb{R}_+^*$, $\ln(1+x) \geqslant \ln(e) = 1$. Par décroissance de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$, on a alors $\dfrac{1}{\ln(1+x)} \leqslant 1$, et puisque $x>0$,

$$f(x) \leqslant x$$

Enfin, puisque $\ln(x+1) \geqslant 1$ et que $x+1>0$, par produit

$$(x+1)\ln(x+1) \geqslant x+1$$

D'après le résultat précédent, on en déduit donc que, si $x \geqslant e-1$,

$$(x+1)\ln(x+1) - x \geqslant 1 > 0$$

Puisque $x^2(x+1)>0$, par quotient :

$$\forall\, x \geqslant e-1,\ f'(x) > 0$$

8. Soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n \geqslant e-1$".
   - Pour $n=0$, $u_0 = e \geqslant e-1$. Donc P_0 est vraie.
   - Supposons que la propriété P_n soit vraie pour un certain entier n fixé. Alors, par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant e-1$. D'après la question précédente, puisque $f'(x) \geqslant 0$ sur $[e-1;+\infty[$, f est croissante sur $[e-1;+\infty[$. Ainsi,

     $$f(e-1) \leqslant f(u_n)$$

     c'est-à-dire $f(e-1) \leqslant u_{n+1}$. Or, $f(e-1) = e-1$. Donc $e-1 \leqslant u_{n+1}$ et P_{n+1} est également vraie.

   D'après le principe de récurrence, la proposition P_n est vraie pour tout entier n : la suite (u_n) est donc bien minorée par $e-1$.

9. Pour tout entier n, $u_n \geqslant e-1$. D'après la question 7, on a alors

$$f(u_n) \leqslant u_n$$

puisque $f(x) \leqslant x$ si $x \geqslant e-1$. On obtient donc $u_{n+1} \leqslant u_n$. La suite (u_n) est donc décroissante, et puisqu'elle minorée (question précédente), elle converge.
Notons l sa limite. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}^+$, d'après le théorème du point fixe, l est un point fixe de f, et puisque 0 n'est pas un point fixe (car $f(0)=1$), l vérifie donc

$$\frac{l}{\ln(l+1)} = l$$

soit $\frac{1}{\ln(l+1)} = 1$ (car $l \neq 0$), c'est-à-dire $l = e-1$.
Bilan : la suite (u_n) converge vers $e-1$.

Exercices

Dérivabilité

Exercice 3. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1+x+\frac{x^2}{2}$ si $x \geqslant 0$, et $f(x) = \mathrm{e}^x$ si $x < 0$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, mais n'est pas 3 fois dérivable.

Exercice 4. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
Montrer que pour tout $n \geqslant 1$, f est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, et montrer que pour tout $x \neq -1$,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}}$$

Accroissements finis

Exercice 5. — Soit k un entier $k \geqslant 2$. En appliquant l'inégalité des accroissements finis sur $[k-1; k]$ à la fonction $f : x \mapsto \frac{-1}{x}$, démontrer que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\geqslant 1}$ définie pour tout $n \geqslant 1$, $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ converge.

Etude de fonctions

Exercice 6. — Soit

$$f : x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x + 1}$$

1. Justifier que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et expliciter f'.
2. Dresser le tableau de variations de f.
3. Tracer dans un repère orthonormé la courbe de f, ainsi que la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 7. — Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-\ln(1+x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que la fonction f est continue sur $]-1; +\infty[$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et expliciter sa dérivée.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1; +\infty[$ (on pourra admettre que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = -\frac{1}{2})$$

4. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 0.
5. Etudier la fonction g définie par $g(x) = (1+x)\ln(1+x) - x$ sur $]-1; +\infty[$, et étudier ensuite l'existence de tangente horizontale pour f.
6. Dresser le tableau de variations de f sur $]-1; +\infty[$.
7. Déterminer la nature des branches asymptotiques de f en -1 et en $+\infty$, puis tracer la courbe de f.

Exercice 8. — Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\mathrm{e}^{-\frac{3}{|x|}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Montrer que f est une fonction impaire sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$, puis qu'elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Déterminer les branches asymptotiques.

Sujets complets

Exercice 9. — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - x^2\ln(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ en $+\infty$ ainsi que celle de $\frac{\varphi(x)}{x}$ en $+\infty$. Interpréter.
2. Montrer que φ est continue sur $\mathbb{R}^+$.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa fonction dérivée.
4. Montrer que φ est dérivable en 0. Donner l'allure de la représentation graphique de φ au voisinage du point d'abscisse 0.
5. Dresser le tableau de variation de φ.
6. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$. Montrer l'existence d'un unique réel α tel que $\varphi(\alpha) = 0$, et justifier que : $\sqrt{2} < \alpha < 2$.

Exercice 10. — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \varphi(x) = \ln(x) - \ln(x+1) + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Prouver que φ est strictement monotone sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Dresser le tableau de variation de φ et y faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \approx 0,7$ et $\ln(3) \approx 1,1$. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 1$ possède une unique solution notée α et que
$$\frac{1}{3} < \alpha < \frac{1}{2}$$

Exercice 11. — On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi(x) = 2\ln\frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

1. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphique-

ment cette limite.

2. Déterminer la limite de $\varphi(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\frac{\varphi(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$. Déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaitre les limites de φ en 0^+ et en $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln 2 \approx 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que

$$\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$$

$$\text{avec } 0 < \alpha < \frac{1}{2} < \beta$$

Exercice 12. — Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par

$$f(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$, et vérifier que $f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}^+$.
3. Etudier la branche infinie de f au voisinage de $+\infty$.
4. Dresser le tableau de variations complet de f.
5. On définit la fonction $g : \left[0; \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R}$ par $\forall\ x \in \left[0; \frac{1}{2}\right],\ \ g(x) = 2\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}$. Montrer que g est bijective de $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ dans un intervalle à considérer.
6. Dresser le tableau de variations complet de g^{-1}
7. Démontrer que g est dérivable en tout point de l'intervalle $\left]0; \sqrt{\frac{2}{\mathrm{e}}}\right[$. Est-elle dérivable aux bornes ?
8. Tracer l'allure des fonctions g et g^{-1}.