CHAPITRE 16

DÉTERMINANTS

Résumé

Dans ce chapitre, on revient sur la notion de déterminant, vue dans les chapitres de Géométrie du plan et de l'espace, que l'on étend à l'ensemble des matrices carrées. On utilisera ensuite le déterminant pour démontrer des résultats (inversibilité de matrices, bijectivité d'application linéaire).

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition de déterminant :
- connaître les propriétés de la définition .... □
- savoir calculer à l'aide du développement selon ligne ou colonne .... □
- savoir calculer à l'aide des opérations élémentaires .... □

② Concernant les propriétés du déterminant :
- connaître les conditions d'un déterminant nul .... □
- maîtriser les propriétés du déterminant d'un produit et d'une transposée .... □
- savoir calculer le déterminant d'une matrice par bloc .... □

③ Savoir utiliser le déterminant pour montrer qu'une matrice est inversible .... □

④ Connaître le lien avec endomorphisme et famille de vecteurs :
- savoir calculer le déterminant d'une famille de vecteurs .... □
- savoir démontrer qu'une famille est une base à l'aide du déterminant .... □
- savoir calculer le déterminant d'un endomorphisme .... □
- savoir montrer qu'un endomorphisme est un automorphisme à l'aide du déterminant .... □

Dans l'ensemble de chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I. Déterminant

1) Définition

Nous avons vu dans les chapitres Géométrie élémentaire du plan et Géométrie élémentaire de l'espace la notion de déterminant de deux vecteurs du plan ou de trois vecteurs de l'espace. Nous allons généraliser cette notation.

Remarque 1. — Une matrice $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ peut aussi se noter $(C_1, \cdots, C_n)$ où C_i désigne la colonne i.

Proposition 16.1.

Soit $n \geqslant 1$. Il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, appelée **déterminant**, vérifiant les trois propriétés suivantes :

- det est **linéaire** par rapport à chacune des colonnes :

$$\det(\lambda C_1 + C_1', C_2, \cdots, C_n) = \lambda \det(C_1, C_2, \cdots, C_n) + \det(C_1', C_2, \cdots, C_n)$$

  (et de même pour les autres colonnes).
- det est **alterné** : lorsqu'on permute deux colonnes, le déterminant change de signe, par exemple

$$\det(C_2, C_1, C_3, \cdots, C_n) = -\det(C_1, C_2, C_3, \cdots, C_n)$$

- Enfin $\det(I_n) = 1$.

Exemple 1. — Le déterminant d'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ correspond au déterminant dans le plan des vecteurs $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$. De même dans l'espace.

Remarque 2. — On dit que le déterminant est une forme multilinéaire alternée.

2) Développement par rapport aux lignes et colonnes

Définition 1 (Matrice extraite)**.** — Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée d'ordre n. Soient i et j deux entiers de $[\![1; n]\!]$. On note $A_{ij} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice extraite de A, obtenue en supprimant la ligne i et la colonne j.

Exemple 2. — Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$. Déterminer $A_{1,1}$, $A_{2,1}$ et $A_{3,2}$.

Solution. En utilisant la définition :

$$A_{1,1} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad A_{2,1} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A_{3,2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Proposition 16.2. Développement par rapport à une ligne

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut calculer le déterminant de $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, par récurrence :

- Si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$ où $A = (a_{11})$.
- Si $n \geqslant 2$,
$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$, on notera $\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Exemple 3. — Vérifier que $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$. Déterminer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

Solution. En appliquant la définition

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} d \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} b \begin{vmatrix} c \end{vmatrix} = ad - bc$$

De même

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Proposition 16.3. Développement par rapport à une colonne

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On peut calculer le déterminant de $A = (a_{ij})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$, par récurrence :

- Si $n = 1$, $\det(A) = a_{11}$ où $A = (a_{11})$.
- Si $n \geqslant 2$,
$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

Proposition 16.4.

Soit $T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$ une matrice triangulaire supérieure. Alors

$$\det(T) = a_{11} \times a_{22} \times \dots \times a_{nn}$$

Démonstration. On procède par récurrence, en développant suivant la première colonne □

3) Opérations élémentaires

Pour calculer en pratique un déterminant, on peut utiliser les opérations élémentaires (celles de la méthode de Gauss-Jordan) :

Proposition 16.5.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si on multiplie une colonne ou une ligne de A par α, le déterminant est également multiplié par α.
- Si on ajoute à une colonne de A un multiple d'une autre colonne, le déterminant de A ne change pas.
- Si on ajoute à une ligne de A un multiple d'une autre ligne, le déterminant de A ne change pas.
- Si on échange deux lignes (ou deux colonnes) de A, on multiplie son déterminant par -1.

Démonstration. Les opérations élémentaires reviennent à multiplier la matrice A par des matrices du type $t_{ij}(\alpha) = I_n + \alpha E_{ji}$ (matrice de transvection pour $i \neq j$) de déterminant 1, ou par $e_{ij} = I_n + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj}$ (pour l'échange), de déterminant -1. □

Exercice 1. — Calculer $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix}$.

Solution. En soustrayant la première ligne à la deuxième et à la troisième (ce qui ne change pas le déterminant) :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 0 & \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ 0 & \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta-\alpha & \beta^2-\alpha^2 \\ \gamma-\alpha & \gamma^2-\alpha^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma^2-\alpha^2) - (\gamma-\alpha)(\beta^2-\alpha^2)$$

Soit, après factorisation

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{vmatrix} = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma+\alpha)-(\gamma-\alpha)(\beta-\alpha)(\beta+\alpha) = (\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)$$

Remarque 3. — Ce type de déterminant est appelé **déterminant de Vandermonde**. Cette méthode est générale pour calculer ces déterminants.

II. Déterminant et opération sur les matrices

1) Déterminant nul

Proposition 16.6.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Si A a une colonne (ou une ligne) nulle, $\det(A) = 0$.
- Si une colonne de A est combinaison linéaire des autres, $\det(A) = 0$.
- Si A n'est pas inversible, $\det(A) = 0$.
- Si $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-1$, $\det(A) = 0$.

Démonstration. Les trois derniers points sont équivalents (cf. chapitre *Espaces vectoriels en dimension finie*). Le premier point découle de la multilinéarité du déterminant : en supposons la colonne C_1 nulle (par exemple), on peut alors écrire

$$\det(A) = \det(0, C_2, \cdots, C_n) = \det(0+0, C_2, \cdots, C_n = \det(0, C_2, \cdots, C_n) + \det(0, C_2, \cdots, C_n)$$

ainsi, $\det(A) = \det(A) + \det(A)$ et donc $\det(A) = 0$. □

Exemple 4. — Calculer le déterminant de $A = \begin{pmatrix} 1 & a & b+c \\ 1 & b & a+c \\ 1 & c & a+b \end{pmatrix}$.

Solution. On remarque, en notant C_1, C_2, C_3 les trois colonnes de A que

$$(a+b+c)C_1 - C_2 = C_3$$

Ainsi, C_3 s'écrit comme une combinaison linéaire de C_1 et C_2 : $\det(A) = 0$.

2) Produit et transposition

Proposition 16.7. Multiplicativité du déterminant

Soient A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

Démonstration. Admise. □

Proposition 16.8.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors
$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$$

Démonstration. Notons $(C_1, \cdots, C_n)$ les colonnes de A. Mais alors
$$\lambda A = (\lambda C_1, \lambda C_2, \cdots, \lambda C_n)$$
et par multilinéarité
$$\det(\lambda A) = \underbrace{\lambda \times \cdots \times \lambda}_{n \text{ fois}} \det(C_1, \cdots, C_n) = \lambda^n \det(A)$$
□

Proposition 16.9. Invariance par transposition

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On a $\det({}^tA) = \det(A)$. Ainsi, toute propriété du déterminant valable sur les colonnes est également valable sur les lignes.

Démonstration. Vient du fait que le développement suivant les lignes ou les colonnes donne le même déterminant. □

3) Matrices inversibles

Le résultat suivant est très important, et déjà vu dans le cas des matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Théorème 16.10.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Alors A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$.

Démonstration. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible, il existe B telle que $AB = I_n$. Ainsi, $\det(AB) = 1$. Or, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$, et donc $\det(A)\det(B) = 1$: $\det(A)$ ne peut être nul.
Si A n'est pas inversible, alors $\text{rg}(A) \leqslant n-1$ et d'après une propriété précédente, $\det(A) = 0$. □

Remarque 4. — La démonstration précédente permet de montrer également que si A est inversible, alors
$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$$

4) Matrice par bloc

Proposition 16.11.

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. On note $L \in \mathscr{M}_{n+p}(\mathbb{K})$ la matrice par blocs définie par
$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ O_{p,n} & D \end{pmatrix}$$
Alors
$$\det(L) = \det(A) \times \det(D)$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur la taille de A. □

III. Applications aux endomorphismes et aux vecteurs

1) Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 2. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E. On appelle **déterminant** de $(u_1, \cdots, u_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le déterminant de la matrice dont les colonnes sont les coordonnées des u_i dans la base $\mathscr{B}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(u_1, \cdots, u_n) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_1), \cdots, \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u_n)\right)$$

Exemple 5. — Soit $((1,1),(1,-1))$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Déterminer le déterminant de cette famille dans la base canonique.

AF

Proposition 16.12.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel de dimension n, et $\mathscr{B} = (e_1, \cdots, e_n)$ une base de E. Soit $(u_1, \cdots, u_n)$ une famille de n vecteurs de E.
$(u_1, \cdots, u_n)$ est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(u_1, \cdots, u_n) \neq 0$.

2) Déterminant d'un endomorphisme

Propriété 1. — *Soient* A *et* B *deux matrices semblables de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. *Alors* $\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{B})$.

Démonstration. En effet, il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{PBP}^{-1}$. Mais alors, par multiplicativité du déterminant :

$$\det(\mathrm{A}) = \det(\mathrm{PBP}^{-1}) = \det(\mathrm{P})\det(\mathrm{B})\det(\mathrm{P}^{-1}) = \det(\mathrm{B})$$

puisque $\det(\mathrm{P}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathrm{P})}$. □

La propriété précédente permet de définir la notion de déterminant d'endomorphisme :

Définition 3. — Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. On appelle **déterminant** de f, et on note $\det(f)$, le déterminant de la matrice de f dans une base quelconque de E :

$$\det(f) = \det\left(\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)\right) \text{ où } \mathscr{B} \text{ est une base de E}$$

La propriété précédente nous assure que cela ne dépend pas de la base choisie.

On dispose d'une caractérisation d'un automorphisme :

Proposition 16.13.

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit f un endomorphisme de E. f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.

Démonstration. En effet, f est un automorphisme si et seulement si la matrice de f dans une base est inversible. □

Exercices

Déterminant de matrices

Exercice 2. — Calculer les déterminants suivant :

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \qquad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \qquad C = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 7 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 3 & 7 & 8 \end{vmatrix}$$

Exercice 3. — Calculer les déterminants suivants :

1. $A = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}$ où (a, b, c) sont trois réels.
2. $B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -a & a \\ a & a & a \end{vmatrix}$ où $a \in \mathbb{R}$.
3. $C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & 1+2x \end{vmatrix}$ où $x \in \mathbb{C}$.

Exercice 4 (Déterminant du Vandermonde)**.** — Soient $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On appelle déterminant de Vandermonde d'ordre n le déterminant

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Montrer par récurrence sur n que

$$V_n = \prod_{1 \leqslant i < j < n} (a_j - a_i)$$

Pour aller plus loin

Exercice 5. — Pour quelle(s) valeur(s) du réel m la matrice $\begin{pmatrix} 1 & m & m^2 \\ m^2 & 1 & m \\ m & m^2 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle inversible ? Donner son rang en fonction de m.

Exercice 6. —

1. Montrer que si $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ est antisymétrique alors $\det(A) = 0$.
2. Plus généralement, montrer que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, avec $n \geqslant 3$ entier **impair**, alors $\det(A) = 0$.
3. Donner un exemple de matrice antisymétrique de déterminant non nul.

Exercice 7. — Soient $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ et $M_3(x_3, y_3)$ trois points du plan. Montrer que M_1, M_2 et M_3 sont alignés si et seulement si

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0$$

Exercice 8. — Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(P) = (X-1)^2 P'' + (kX+1)P' + P$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $k \in \mathbb{R}$ pour que l'endomorphisme soit un automorphisme.