CHAPITRE 17

# DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

**Résumé**

*Dans ce chapitre, on revient sur la notion de développement limité, vue dans le chapitre Dérivabilité, que l'on étend au cas général des développements limités d'ordre $n$. On utilise ces développements limités pour déterminer des limites, asymptotes et positions relatives.*

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.*

① Connaître la définition de négligeable et équivalence :
- connaître la définition ........ □
- connaître les différentes propriétés usuelles ........ □
- connaître les négligeabilités et équivalences usuelles ........ □

② Concernant les développements limités :
- connaître la définition d'un développement limité ........ □
- savoir obtenir des développements limités (somme, produit, composée, troncature, quotient, intégration) ........ □
- connaître les développements limités usuels ........ □

③ Savoir utiliser la formule de Taylor-Young pour déterminer des développements limités ........ □

④ Savoir utiliser les développements limités : :
- pour déterminer des limites et des équivalents ........ □
- pour déterminer des positions relatives ........ □
- pour déterminer des asymptotes et position relatives ........ □

Dans l'ensemble de chapitre, $\mathbb{K}$ désignera $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

# I. Comparaison locale

Dans toute cette partie, $x_0$ désignera ou bien un nombre réel, ou bien $+\infty$, ou bien $-\infty$.

**Définition 1.** — On appelle **voisinage** de $x_0$ :

- un intervalle de la forme $]x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon[$, $]x_0-\varepsilon, x_0[$ ou $]x_0, x_0+\varepsilon[$ si $x_0$ est un réel.
- $]A;+\infty[$, avec A réel, si $x_0=+\infty$.
- $]-\infty;A[$, avec A réel, si $x_0=-\infty$.

## 1) Négligeable

**Définition 2.** — Soient $f$ et $g$ définies au voisinage de $x_0$, avec $g$ ne s'annulant pas au voisinage de $x_0$. Alors, on dit que $f$ est **négligeable** devant $g$ au voisinage de $x_0$, et on note $f=o_{x_0}(g)$, si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$f=o_{x_0}(g)$ peut se noter également $f(x)=o_{x_0}(g(x))$ et se lit "$f$ est un petit $o$ de $g$ au voisinage de $x_0$".

**Exemple 1.** — Par exemple, $x=o_{+\infty}(x^2)$ puisque

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

**Proposition 17.1.**

$f=o_{x_0}(1)$ si et seulement si $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

*Démonstration.* En effet, la fonction constante égale à 1 ne s'annule pas au voisinage de $x_0$ et on a $f=o_{x_0}(1)$ par définition si et seulement si

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{1}=0\iff\lim_{x\to x_0}f(x)=0$$

□

**Théorème 17.2. Négligeabilités usuelles**

On a

- Si $0\leqslant\alpha<\beta$, on a
$$x^\alpha=o_{+\infty}\left(x^\beta\right)\quad\text{et}\quad x^\beta=o_0\left(x^\alpha\right)$$
- Si $\alpha\geqslant0$ et $\beta>0$, on a
$$x^\alpha=o_{+\infty}\left(e^{\beta x}\right)$$
et en particulier $x^\alpha=o_{+\infty}(e^x)$.
- Si $\alpha\geqslant0$ et $\beta>0$, on a
$$(\ln(x))^\alpha=o_{+\infty}\left(x^\beta\right)$$

- Si $\alpha \in \mathbb{N}$ et $\beta > 0$, on a
$$(\ln(x))^{\alpha} = o_0\left(\frac{1}{x^{\beta}}\right)$$

*Démonstration.* Cela découle des croissances comparées :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{e^{\beta x}} = 0 \iff x^{\alpha} = o_{+\infty}\left(e^{\beta x}\right)$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^{\alpha}}{x^{\beta}} = 0 \iff (\ln x)^{\alpha} = o_{+\infty}\left(x^{\beta}\right)$$
$$\lim_{x\to 0} x^{\beta}(\ln x)^{\alpha} = 0 \iff (\ln x)^{\alpha} = o_0\left(x^{\beta}\right)$$

De plus, $\frac{x^{\alpha}}{x^{\beta}} = x^{\alpha-\beta}$ et le premier résultat découle des limites des fonctions puissances. □

**Propriété 1.** — *Soient $f, g$ et $h$ des fonctions définies au voisinage de $x_0$ :*

- *Transitivité : si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(h)$, alors $f = o_{x_0}(h)$.*
- *Linéarité : si $f = o_{x_0}(h)$ et $g = o_{x_0}(h)$, alors pour tous réels $a$ et $b$, on a $af + bg = o_{x_0}(h)$*

*Démonstration.* Si $f = o_{x_0}(g)$ et $g = o_{x_0}(h)$ alors $g$ et $h$ ne s'annulent pas au voisinage de $x_0$, et on peut écrire
$$\frac{f}{h} = \frac{f}{g} \times \frac{g}{h}$$
et ainsi $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{h(x)} = 0$ par produit des limites.
De même, si $f = o_{x_0}(h)$ et $g = o_{x_0}(h)$ alors $h$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$ et on a
$$\frac{af+bg}{h} = a\frac{f}{h} + b\frac{g}{h}$$
Par somme et produit des limites, on en déduit donc que $\lim_{x\to x_0} \frac{(af+bg)(x)}{h(x)} = 0$. □

**Remarque 1.** — On peut dans certains cas diviser. Le plus classique : si $f(x) = o_0(x^n)$, alors pour tout $p \leqslant n$, $\frac{f(x)}{x^p} = o_0(x^{n-p})$. En effet
$$\frac{\frac{f(x)}{x^p}}{x^{n-p}} = \frac{f(x)}{x^n} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

## 2) Equivalence

**Définition 3.** — Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $x_0$. On dit que $f$ est **équivalente** à $g$ en $x_0$ si, au voisinage de $x_0$, on a
$$f - g = o_{x_0}(g)$$
ce qu'on note $f \sim_{x_0} g$. Ainsi, puisque $g$ ne s'annule pas au voisinage de $x_0$, on a
$$f \sim_{x_0} g \quad \text{si et seulement si} \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

**Théorème 17.3. Polynômes**

Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels tels que $0 \leqslant \alpha < \beta$. Alors

$$\left(x^\alpha + x^\beta\right) \sim_{+\infty} x^\beta \quad \text{et} \quad \left(x^\alpha + x^\beta\right) \sim_0 x^\alpha.$$

De plus, si $\alpha$ et $\beta$ sont des entiers, alors

$$\left(x^\alpha + x^\beta\right) \sim_{-\infty} x^\beta$$

Ainsi, on obtient que

- un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus haut degré au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$;
- un polynôme non nul est équivalent à son monôme de plus bas degré au voisinage de 0.

*Démonstration.* En effet, puisque $\alpha - \beta < 0$ et $\beta - \alpha > 0$ :

$$\frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\beta} = x^{\alpha-\beta} + 1 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + 1 = 1$$

et

$$\frac{x^\alpha + x^\beta}{x^\alpha} = 1 + x^{\beta-\alpha} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1 + 0 = 1$$

□

**Théorème 17.4. Equivalences usuelles**

Soit $u$ une fonction définie au voisinage de $x_0$ telle que
$\lim\limits_{x\to x_0} u(x) = 0$.

- $\ln(1+u(x)) \sim_{x_0} u(x)$, et en particulier, $\ln(1+x) \sim_0 x$.
- $\left(e^{u(x)} - 1\right) \sim_{x_0} u(x)$, en particulier $\left(e^x - 1\right) \sim_0 x$.
- $\left((1+u(x))^\alpha - 1\right) \sim_{x_0} \alpha u(x)$ si $\alpha \neq 0$. En particulier $\left((1+x)^\alpha - 1\right) \sim_0 \alpha x$.

*Démonstration.* Théorème admis - repose sur la limite d'un taux d'accroissement. □

**Propriété 2.** — *Soient $f$, $g$ et $h$ trois fonctions définies au voisinage de $x_0$, avec $h$ ne s'annulant pas au voisinage de $x_0$.*

- *Si $f \sim_{x_0} g$ et $g \sim_{x_0} h$ alors $f \sim_{x_0} h$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$, alors $f \times h \sim_{x_0} g \times h$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$ alors pour tout entier $n$, $f^n \sim_{x_0} g^n$.*
- *Si $f \sim_{x_0} g$ et si $f$ et $g$ ne s'annulent pas au voisinage de $x_0$, alors $\dfrac{1}{f} \sim_{x_0} \dfrac{1}{g}$.*

**Remarque 2.** — Ainsi, on peut multiplier et diviser des équivalents.
⚠On ne peut ni ajouter, ni composer des équivalents (sauf par une fonction puissance d'exposant entier).

**Exemple 2.** — Soit $f : x \mapsto x^3 + x^2$ et $g : x \mapsto x^2 - x^3$. Déterminer un équivalent de $f$, de $g$ et de $f + g$ au voisinage de $+\infty$.

*Solution.* Puisque $f$ et $g$ sont des polynômes, on a rapidement que $f(x) \sim_{+\infty} x^3$ et $g(x) \sim_{+\infty} -x^3$. Enfin, $(f+g)(x) = 2x^2 \sim_{+\infty} 2x^2$. Ainsi, on ne peut pas additionner les équivalents.

**Proposition 17.5. Equivalent et limite**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies au voisinage de $x_0$. On suppose que $f \sim_{x_0} g$ et que $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = \ell$. Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

*Démonstration.* Remarquons que $f = \dfrac{f}{g} \times g$. Puisque $f \sim_{x_0} g$, on a $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ et par hypothèse $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$. Par produit des limites, $f$ admet une limite en $x_0$ qui vaut $l$. □

# II. Développements limités

## 1) Définition

**Définition 4.** — Soit $f$ une fonction définie au voisinage de $x_0$, et $n$ un entier naturel. On dit que $f$ admet un **développement limité** à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ s'il existe des réels $a_0, a_1 \cdots, a_n$ tels qu'au voisinage de $x_0$ on ait

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n + o_{x_0}\left((x - x_0)^n\right)$$

La partie $a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$ est appelée **partie régulière** du développement limité, et $o_{x_0}((x - x_0)^n)$ le **terme complémentaire**.
On abrégera régulièrement "développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$" en $\mathrm{DL}_n(x_0)$.

**Remarque 3.** — L'idée d'un développement limité est de trouver une approximation locale d'une fonction $f$ par un polynôme. Le terme complémentaire est essentiel, puisqu'il permet d'indiquer l'ordre du développement limité.

**Exemple 3.** — On a le développement limité à l'ordre 1 suivant : $\ln(1 + x) = x + o_0(x)$. En effet,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} - 1 = 0$$

**Exercice 1.** — Montrer qu'on a le développement limité suivant : $\mathrm{e}^x = 1 + x + o_0(x)$.

*Solution.* En effet

$$\frac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x} = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} - 1 \xrightarrow[x \to 0]{} 1 - 1 = 0$$

**Remarque 4.** — $f$ admet un développement limité en $x_0$ si et seulement si la fonction $h \mapsto f(x_0+h)$ admet un développement limité en 0 (par rapport à la variable $h$). Dans la suite, on n'énoncera ainsi que les résultats pour les développements limités en 0.

**Proposition 17.6.**

Soit $f$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$. Alors la partie régulière est unique.

*Démonstration.* Montrons-le dans le cas d'un voisinage de 0. Ecrivons $f(x) = \mathrm{P}(x) + o_0(x^n) = \mathrm{Q}(x) + o_0(x^n)$ avec P, Q deux polynômes de degrés inférieurs ou égaux à $n$. Mais alors

$$\mathrm{P}(x) - \mathrm{Q}(x) = o_0(x^n) \quad \text{soit} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{P}(x)-\mathrm{Q}(x)}{x^n} = 0$$

Or, puisque $\deg(\mathrm{P}-\mathrm{Q}) \leqslant n$, ce résultat est impossible, sauf si $\mathrm{P}-\mathrm{Q} = 0$. Ainsi, $\mathrm{P} = \mathrm{Q}$ et la partie régulière est unique. □

**Exercice 2.** — Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \mapsto \frac{1}{1-x}$ (on pourra s'intéresser à $1 + x + \cdots + x^n$).

*Solution.* Remarquons que, pour $x \neq 1$ :

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Ainsi, pour $x \neq 1$ :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Or

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^{n+1}}{1-x}}{x^n} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Ainsi, $\dfrac{x^{n+1}}{1-x} = o_0(x^n)$ et donc

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

## 2) Propriétés des DL

**Proposition 17.7. Troncature**

Soit $f$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ de la forme

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + o_{x_0}\left((x-x_0)^n\right)$$

et soit $0 \leqslant p < n$. Alors $f$ admet un développement limite à l'ordre $p$, donné par

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_p(x-x_0)^p + o_{x_0}\left((x-x_0)^p\right)$$

**Exemple 4.** — Ainsi, si $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + o_0(x^3)$ alors $f(x) = 1 + x + x^2 + o(x^2)$.

 

**Proposition 17.8. Opérations sur les DL**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0. On écrit

$$f(x) = \mathrm{P}(x) + o_0(x^n) \quad \text{et} \quad g(x) = \mathrm{Q}(x) + o_0(x^n)$$

avec P, Q deux polynômes de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

- Pour tout réel $\lambda$, $\lambda f + g$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0, dont la partie régulière est $\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}$.
- $f \times g$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0, dont la partie régulière est la troncature du polynôme $\mathrm{P}\times\mathrm{Q}$ à l'ordre $n$.
- Si $f(0) = 0$, $g \circ f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0, dont la partie régulière est la troncature du polynôme $\mathrm{Q}\circ\mathrm{P}$ à l'ordre $n$.

*Démonstration.* Le premier point se fait aisément, en utilisant les règles de prépondérance :

$$\lambda f(x) + g(x) = \lambda\mathrm{P}(x) + o_0(x^n) + \mathrm{Q}(x) + o_0(x^n) = (\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})(x) + o_0(x^n)$$

Pour le deuxième point, on écrit astucieusement :

$$f \times g - \mathrm{P}\times\mathrm{Q} = f\times g - f\times\mathrm{Q} + f\times\mathrm{Q} - \mathrm{Q}\times\mathrm{P} = f\times(g-\mathrm{Q}) + \mathrm{Q}\times(f-\mathrm{P})$$

Mais alors

$$f\times g - \mathrm{P}\times\mathrm{Q} = f o_0(x^n) + \mathrm{Q} o_0(x^n) = o_0(x^n)$$

Le dernier point est admis. □

**Remarque 5.** — ⚠ Pour $f\times g$, $\mathrm{P}\times\mathrm{Q}$ a un degré $2n$, mais n'apporte qu'une information jusqu'à l'ordre $n$, et donc tout monôme de degré strictement supérieur à $n$ sont à supprimer.
Ces résultats sont valables de manière générale en $x_0$, quitte à poser $f(x_0+h)$.

**Exercice 3.** — Déterminer un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$.

*Solution.* On part du développement limité

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o_0(x^n)$$

et on compose $f : x \mapsto -x$ (qui vérifie bien $f(0) = 0$) par $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$

De même, on compose $x \mapsto x^2$ par le précédent et on tronque le résultat à l'ordre $n$ :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^p x^{2p} + \cdots + o_0(x^n)$$

**Proposition 17.9. Parité**

Soit $f$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0.

- Si $f$ est paire, alors sa partie régulière ne contient que des termes de degrés pairs.

- Si $f$ est impaire, alors sa partie régulière ne contient que des termes de degrés impairs.

*Démonstration.* Ecrivons $f(x) = \mathrm{P}(x) + \mathrm{I}(x) + o(x^n)$, où P contient les termes pairs, et I les termes impairs du développement limité. Mais alors $f(-x) = \mathrm{P}(x) - \mathrm{I}(x) + o(x^n)$. Par unicité du développement limité, par exemple si $f$ est paire, on a nécessairement $\mathrm{I}(x) = 0$. □

### 3) Quotient

**Méthode 17.1.**

Pour déterminer le développement limité d'un quotient $\frac{f}{g}$, on écrira $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$ et on se ramènera au développement limité de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ par composée.

**Exercice 4.** — Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{-x^2+x+1}$.

*Solution.* On utilise le développement limité à l'ordre 3 de $\frac{1}{1+x}$ et on compose $x \mapsto x - x^2$ par celui-ci, en tronquant à l'ordre 3 : $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 = o_0(x^3)$ donc

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - (x-x^2) + (x-x^2)^2 - (x-x^2)^3 + o_0(x^3)$$

soit, après développement et troncature

$$\frac{1}{1+x-x^2} = 1 - x + x^2 + (x^2 - 2x^3) - x^3 + o_0(x^3) = 1 - x + 2x^2 - 3x^3 + o_0(x^3)$$

### 4) Développement limité, continuité et dérivabilité

**Proposition 17.10.**

$f$ admet un développement limité à l'ordre 0 au voisinage de $x_0$ de la forme $f(x) = l + o_{x_0}(1)$ si et seulement si $f$ est continue (ou prolongeable par continuité) en $x_0$ et $f(x_0) = l$.

*Démonstration.* En effet, $f(x) - l = o_{x_0}(1) \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)-l}{1} = 0$. □

**Rappel 1.** — *$f$ admet un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $x_0$ de la forme $f(x) = a + b(x-x_0) + o_{x_0}(x-x_0)$ si et seulement si $f$ est dérivable en $x_0$ et $f(x_0) = a$ et $f'(x_0) = b$.*

*Démonstration.* En effet, par troncature, $f$ est continue en $x_0$ et $f(x_0) = a$. Enfin

$$f(x) = a + bx + o_{x_0}(x-x_0) \Longleftrightarrow \frac{f(x)-a}{x-x_0} = b + o_{x_0}(1) \xrightarrow{x \to x_0} b$$

□

**Remarque 6.** — ⚠ Ce résultat, vrai si $f$ est continue ou dérivable, n'est plus vrai pour les dérivées d'ordre supérieur. Ainsi, une fonction peut avoir un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0 sans être deux fois dérivable en 0.

**Exemple 5.** — Soit $f : x \mapsto x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. Montrer que $f(x) = o_0(x^2)$ mais que $f$ n'est pas deux fois dérivable en 0.

*Solution.* Rapidement, pour $x \neq 0$, on a $\frac{f(x)}{x^2} = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$ en 0 (par encadrement classique). Donc $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. $f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Pour $x \neq 0$, on a

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Calculons alors le taux d'accroissement de $f'$ en 0 :

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x} = 3x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Le premier terme admet une limite en 0 (qui vaut 0). En revanche, le deuxième terme n'en admet pas (car cos n'admet pas de limite en $+\infty$ ou en $-\infty$. Ainsi, $f'$ ne peut être dérivable en 0, et $f$ n'est donc pas deux fois dérivable en 0.

## 5) Intégration

**Proposition 17.11.**

Soit $f$ une fonction continue sur un intervalle contenant 0. On suppose que $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n}_{=\mathrm{P}(x)} + o_0(x^n)$$

Alors une primitive de $f$ admet un développement limité à l'ordre $n+1$ au voisinage de 0, dont la partie régulière est la primitive de P nulle en F(0) :

$$\mathrm{F}(x) = \mathrm{F}(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + o_0\left(x^{n+1}\right)$$

*Démonstration.* Posons $\mathrm{Q}(x) = \mathrm{F}(0) + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2}{3}x^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{F}(t) - \mathrm{Q}(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0; x]$ (pour $x$ bien choisi), donc par inégalité des accroissements finis

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{Q}(x) - (\mathrm{F}(0) - \mathrm{Q}(0))}{x - 0}\right| \leqslant \max_{t \in [0;x]} |(\mathrm{F} - \mathrm{Q})'(t)| = \max_{t \in [0;x]} |f(t) - \mathrm{P}(t)|$$

Ainsi,

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x) - \mathrm{Q}(x)}{x^{n+1}}\right| \leqslant \frac{\max_{t \in [0;x]} |f(t) - \mathrm{P}(t)|}{x^n} \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Puisque $f(x) - \mathrm{P}(x) = o_0(x^n)$. □

**Exercice 5.** — Déterminer un $\mathrm{DL}_{n+1}(0)$ de $x \mapsto \ln(1+x)$ et un $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de $x \mapsto \arctan(x)$.

*Solution.* On part d'un $\mathrm{DL}_n(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ que l'on intègre :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o_0(x^n)$$

et donc

$$\ln(1+x) = \underbrace{\ln(1+0)}_{=0} + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o_0(x^{n+1})$$

De même, on écrit un $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ que l'on intègre :

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + o_0(x^{2n})$$

et donc

$$\arctan(x) = \underbrace{\arctan(0)}_{=0} + x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o_0(x^{2n+1})$$

# III. Formule de Taylor-Young

## 1) Formule de Taylor-Young

**Théorème 17.12. Formule de Taylor-Young**

Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I})$ où I est un intervalle contenant $x_0$. Alors $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de $x_0$ et

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o_{x_0}((x-x_0)^n)$$

*Démonstration.* La preuve se fait par récurrence et est admise. □

**Exercice 6.** — Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp.

*Solution.* exp est de classe $\mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout entier $n$ (puisqu'en réalité, exp est de classe $\mathscr{C}^\infty$) et on a

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(k)} = \exp \quad \text{et donc} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \exp^{(k)}(0) = \exp(0) = 1$$

Ainsi, $f$ admet un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 et

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\exp^{(k)}(0)}{k!} x^k + o_0(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k + o_0(x^n)$$

## 2) Développements limités usuels

En utilisant la formule de Taylor-Young, on obtient les développements limités au voisinage de 0 suivants, qui sont à connaître par cœur.

- Les développements limités liés à $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n+o_0(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o_0(x^n)\\
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o_0(x^n)\\
\ln(1-x) &= -x-\frac{x^2}{2}-\cdots-\frac{x^n}{n}+o_0(x^n)\\
\frac{1}{1+x^2} &= 1-x^2+x^4+\cdots+(-1)^n x^{2n}+o_0(x^{2n})\\
\arctan(x) &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+o_0\left(x^{2n+1}\right)
\end{aligned}$$

- Les développements limités liés à l'exponentielle :

$$\begin{aligned}
\exp(x) &= 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o_0(x^n)\\
\mathrm{ch}(x) &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o_0(x^{2n})\\
\mathrm{sh}(x) &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o_0(x^{2n+1})\\
\cos(x) &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o_0(x^{2n})\\
\sin(x) &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+o_0(x^{2n+1})\\
\tan(x) &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+o_0(x^5)
\end{aligned}$$

- Puissance :

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o_0(x^n)$$

  et en pratique

$$\sqrt{1+x} = 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+o_0(x^n)$$

# IV. Applications

## 1) Calcul de limite

On peut utiliser les développements limités pour lever des formes indéterminées.

**Exercice 7.** — Calculer

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)(\mathrm{e}^x+1)-3(\ln(1+x)+1)+1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$

*Solution.* Dans le premier cas, on utilise le développement limité de exp et de $x \mapsto \ln(1+x)$ à l'ordre 2 (car le $x^2$ au dénominateur nous donne l'intuition) :

$$\frac{(x+1)(1+x+\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)+1)-3(x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)+1)+1}{x^2} = \frac{3x^2+o_0(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 3$$

De même, en effectuant un développement limité à l'ordre 2 de $x \mapsto \ln(1+x)$ :

$$\frac{\ln(1+x)-x}{x^2} = \frac{x-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)-x}{x^2} = \frac{-\frac{x^2}{2}+o_0(x^2)}{x^2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\frac{1}{2}$$

## 2) Recherche d'équivalents

**Proposition 17.13.**

Soit $f$ une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n$ au voisinage de 0 :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + o_0(x^n)$$

Soit $p$ l'indice du premier coefficient $a_p$ non nul. On appelle **forme normalisée** du développement limité l'écriture

$$f(x) = x^p\left(a_p + a_{p+1}x + \cdots + a_n x^{n-p} + o_0(x^{n-p})\right)$$

et dans ce cas

$$f(x) \sim_0 a_p x^p$$

**Remarque 7.** — On peut raisonner en dehors de 0, en faisant un développement limité à l'ordre $n$ de $x \mapsto f(x_0+x)$.

**Exercice 8.** — Déterminer un équivalent simple en 0 de

$$f : x \mapsto \frac{\operatorname{sh}(x)-\sin(x)}{1-\cos(x)}$$

*Solution.* On utilise un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de chacune des fonctions :

$$\frac{\operatorname{sh}(x)-\sin(x)}{1-\cos(x)} = \frac{x+\frac{x^3}{3!}-\left(x-\frac{x^3}{3!}\right)+o_0(x^3)}{1-\left(1-\frac{x^2}{2!}+o_0(x^3)\right)} = \frac{\frac{x^3}{3}+o_0(x^3)}{\frac{x^2}{2}+o_0(x^3)} = \frac{\frac{x}{3}+o_0(x)}{\frac{1}{2}+o_0(x)}$$

Ainsi,

$$f(x) \sim_0 \frac{2}{3}x$$

## 3) Position relative de courbe

**Méthode 17.2.**

Supposons que $f$ admette un $\mathrm{DL}_1(x_0)$. Alors on obtient l'équation de la tangente à la courbe de $f$ au point d'abscisse $x_0$ en prenant la partie régulière du développement limité. En appliquant le résultat précédent, et sous réserve qu'un DL d'ordre suffisant existe, on peut écrire

$$f(x) - (a+bx) \sim_{x_0} a_p(x-x_0)^p$$

Alors le signe de $a_p(x-x_0)^p$ permet de donner la position relative de la courbe et de la tangente au voisinage de $x_0$ : s'il est positif, la courbe est au dessus de sa tangente; sinon elle est au-dessous.

**Remarque 8.** — Attention : le résultat n'est vrai que localement autour de $x_0$.

**Exemple 6.** — Soit $f : x \mapsto \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$. Montrer que $f$ est dérivable en 0, et étudier la position relative de la courbe de $f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

*Solution.* Utilisons le développement limité de $x \mapsto \ln(1+x)$ au voisinage de $x_0$ :

$$f(x) = \frac{x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o_0(x^4) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2)$$

D'une part, puisque $f$ admet (par troncature) un $\mathrm{DL}_1(0)$, $f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{3}$, mais de plus, $f(x) - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{3}x\right) = -\frac{1}{4}x^2 + o_0(x^2)$.
Puisque $-\frac{1}{4}x^2 < 0$ au voisinage de 0, on en déduit que la tangente à la courbe de $f$ au voisinage de 0 est localement toujours au-dessus de la courbe de $f$.

## 4) Asymptote

**Définition 5.** — On dit qu'une fonction $f$ admet un **développement asymptotique** à l'ordre $n$ au voisinage de $+\infty$ si on peut écrire

$$f(t) = a_0 + \frac{a_1}{t} + \cdots + \frac{a_n}{t^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^n}\right)$$

**Méthode 17.3.**

Pour obtenir un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ de $f(x)$, on cherche un développement limité au voisinage de 0 de $f\left(\frac{1}{t}\right)$, puis on pose $t = \frac{1}{x}$.

**Exercice 9.** — Déterminer un développement asymptotique à l'ordre 2 de

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x}$$

*Solution.* Notons $u = \frac{1}{x}$. On a alors $f(u) = u\sqrt{1+u}$. Faisons un développement limité au voisinage de 0 :

$$f(u) = u\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) = u + \frac{1}{2}u^2 + u_0(u^2)$$

On obtient alors de développement asymptotique

$$f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

**Proposition 17.14.**

Soit $f$ une fonction, telle que $\frac{f(x)}{x}$ admet un développement asymptotique au voisinage de $+\infty$ à l'ordre $n$ :

$$\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

soit encore

$$f(x) = a_0 x + a_1 + \frac{a_2}{x} + \cdots + \text{ă}\frac{a_n}{x^{n-1}} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x^{n-1}}\right)$$

Soit $p \geqslant 2$ l'indice du premier coefficient $a_p$ non nul. Alors $y = a_0 x + a_1$ est asymptote à la courbe de $f$ au voisinage de $+\infty$, et le signe de $\frac{a_p}{x^{p-1}}$ donne la position de la courbe et de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

**Exercice 10.** — Déterminer l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et la position relative avec la courbe de la fonction

$$f : x \mapsto x\sqrt{1+\frac{1}{x}}$$

*Solution.* En procédant comme précédemment, posons $u = \frac{1}{x}$. $f(u) = \frac{1}{u}\sqrt{1+u}$ et faisons un développement limité à l'ordre 2 de $u \mapsto \sqrt{1+u}$ :

$$f(u) = \frac{1}{u}\left(1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + o_0(u^2)\right) = \frac{1}{u} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8}u + o_0(u)$$

Soit, en revenant à $x$ :

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \frac{1}{8x} + o_{+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Ainsi, la courbe de $f$ admet la droite d'équation $y = x + \frac{1}{2}$ comme asymptote oblique, et puisque $-\frac{1}{8x} < 0$ au voisinage de $+\infty$, la courbe de $f$ est localement en dessous de son asymptote.

# Exercices

## Développements limités

**Exercice 11.** — A partir du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1+x}$ au voisinage de 0, déterminer un développement limité à l'ordre 4 de

$$x \mapsto \sqrt{1+x^2} \qquad x \mapsto \sqrt{1-x^2} \qquad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

et en déduire un développement limité à l'ordre 5 de arcsin.

**Exercice 12.** — Déterminer les développements limités suivant :

1. $x \mapsto \frac{1}{3+x}$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
2. $x \mapsto \sin(2x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
3. $x \mapsto (\ln(1+x))^2$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.
4. exp au voisinage de 1 à l'ordre 4.
5. $x \mapsto \exp(1+\sin(x))$ au voisinage de 0 à l'ordre 4.

**Exercice 13** (DL de tan)**.** — L'objectif de cet exercice est de déterminer un développement limité de tangente suivant plusieurs méthodes.

1. Pourquoi tan admet-elle un $\mathrm{DL}_n(0)$ pour tout $n$ ?
2. En utilisant la formule de Taylor-Young, déterminer un développement limité à l'ordre 2 de tangente.
3. Méthode par unicité.
   (a) Expliquer pourquoi $\tan'$ admet un développement limité d'ordre $n$ au voisinage de 0 (pour tout entier $n$).
   (b) On note $\tan'(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o_0(x^4)$. Déterminer en fonction des $a_i$ le développement limité de tan au voisinage de 0.
   (c) En utilisant la relation $\tan' = 1 + \tan^2$, en déduire une relation sur les $a_i$, puis déterminer ceux-ci.
4. Méthode par polynôme.
   Soit $(\mathrm{P}_n)$ la suite de polynôme définie par $\mathrm{P}_0(\mathrm{X}) = \mathrm{X}$ et pour tout entier $n$, $\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X}) = (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}'_n(\mathrm{X})$.
   (a) Déterminer $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \mathrm{P}_4$ et $\mathrm{P}_5$.
   (b) Montrer par récurrence sur , $n$ que pour tout réel $x \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, on a
   $$\tan^{(n)}(x) = \mathrm{P}_n(\tan(x))$$
   (c) En déduire $\tan^{(n)}(0)$ pour tout $n \in [\![1;5]\!]$, puis un développement limité de tan à l'ordre 6 au voisinage de 0.

## Limites de fonctions

**Exercice 14.** — Déterminer les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{\sin(x)}}{x^3}$.

2. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sh}(x) - x\,\mathrm{ch}(x)}{x^3}$.
3. $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x$.
4. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

## Etude locale de fonction

**Exercice 15.** — Soit $f : x \mapsto \frac{\sqrt{\cos(x)}-1}{x(1+x^2)}$.

1. A partir du développement limité de $x \mapsto \sqrt{1-x}$, déterminer le développement limité à l'ordre 4 au voisinage de 0 de $\sqrt{\cos(x)} - 1$.
2. En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de $f$.
3. Démontrer que $f$ est continue et dérivable en 0, et donner $f(0)$ et $f'(0)$.
4. Déterminer la position relative de la courbe de $f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.

**Exercice 16.** — Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x} \ln\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$.

1. Donner un développement limité à l'ordre 3 de $f$ au voisinage de 0.
2. En déduire un prolongement par continuité, la dérivabilité et la position relative de la courbe de $f$ et de sa tangente au point d'abscisse 0.