CHAPITRE 18

INTÉGRALE SUR UN INTERVALLE

Résumé

Dans ce chapitre, on généralise la notion d'intégrale, vue sur un segment, au cas d'un intervalle quelconque. On verra des méthodes pour s'assurer que ces intégrales existent, et pour les calculer.

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition d'intégrale sur un intervalle :
- connaître la définition .... □
- connaître les différentes propriétés usuelles .... □

② Concernant les théorèmes d'existence :
- connaître le théorème de majoration des fonctions positives .... □
- savoir utiliser les équivalents de fonctions de signe constant .... □
- connaître les intégrales de référence (Riemann, exponentielle) .... □
- savoir appliquer un changement de variable à une intégrale généralisée .... □

③ Connaître la notion de convergence absolue :
- connaître la définition .... □
- l'inégalité triangulaire, et le cas d'une fonction continue dont l'intégrale converge absolument vers 0 .... □

I. Intégrale sur un intervalle quelconque

L'idée est d'étendre la notion d'intégrale, mais sur un intervalle infini, du type $[a;+\infty[$, $]-\infty;a[$ voire $]-\infty;+\infty[$; où sur un intervalle du type $]a;b]$ ou la fonction n'est pas définie en a.ă

1) Définition

Définition 1. — Soit f une fonction continue, définie sur $[a;b[$, où $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est **convergente** si et seulement si $\lim\limits_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ existe et est finie. Dans ce cas, on note

$$\int_{[a;b[} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 1. — On définit de même le cas où f est définie sur $]a;b]$, ou $]a;b[$ (dans ce cas, il y a deux limites à traiter).

Remarque 2. — On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est une intégrale **impropre** (puisque, rigoureusement, l'intégrale n'est définie que sur un segment).

Exemple 1. — Soit $f : t\mapsto e^{-t}$ sur $[0;+\infty[$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Solution. Soit $x>0$. Alors

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = [-e^{-t}]_0^x = 1-e^{-x}$$

et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-e^{-x}=0$. Donc $\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ existe, et

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t = 1$$

2) Propriétés

Toutes les propriétés de base se généralisent aux intégrales sur un intervalle quelconque.

a) Linéarité

Propriété 1 (Linéarité). — *Soient f et g deux fonctions continues sur $[a;b[$, et $\lambda\in\mathbb{R}$.*

- *Si $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, et*

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

- *Si* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent, alors* $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ *converge également, et*

$$\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 3. — Attention : l'intégrale $\int_a^b (f(t)+g(t))\,\mathrm{d}t$ peut exister, sans pour autant que $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ n'existent.

Par exemple, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} - \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ ne convergent pas, et pourtant la somme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

b) Relation de Chasles

Propriété 2 (Relation de Chasles)**.** — *Soient* $-\infty \leqslant a < c < b \leqslant +\infty$ *et* f *une fonction continue sur* $]a;b[$. *Alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent. Dans ce cas*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

c) Positivité et croissance de l'intégrale

Propriété 3 (Positivité et croissance)**.** — *Soient* f *et* g *deux fonctions continues sur l'intervalle* $[a;b[$. *On suppose que* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *et* $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ *convergent.*

- *Positivité : si* f *est positive sur* $[a;b[$ *(avec* $a \leqslant b$*), alors* $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.
- *Croissance : si, pour tout* $t \in [a;b[$, $f(t) \leqslant g(t)$ *(avec* $a \leqslant b$*) alors*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

II. Théorèmes d'existence

1) Intégrales de référence

Théorème 18.1. Intégrale de Riemann

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$. Dans ce cas

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha-1}$$

Démonstration. Dans le cas où $\alpha \neq 1$, on a

$$\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_1^x = \frac{1}{(1-\alpha)x^{\alpha-1}} - \frac{1}{1-\alpha}$$

- Si $\alpha > 1$: quand x tend vers $+\infty$, cette intégrale converge vers $\dfrac{1}{\alpha-1}$
- Si $\alpha < 1$:
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\alpha-1}} = +\infty$$
donc l'intégrale diverge.
- Si $\alpha = 1$, on a
$$\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(x) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$
L'intégrale diverge donc.

$\square$

Théorème 18.2. Intégrale de Riemann - 2

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$. Dans ce cas,
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$

Démonstration. Pour $\alpha \neq 1$, on a, pour tout $u \in]0;1[$,
$$\int_u^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{t^{\alpha-1}}\right]_u^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\frac{1}{u^{\alpha-1}}$$
Si $\alpha > 1$, $\lim_{u\to 0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = +\infty$. L'intégrale diverge donc. Si $\alpha < 1$, $\lim_{u\to 0} \frac{1}{u^{\alpha-1}} = 0$ donc l'intégrale converge et
$$\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}$$
Si $\alpha = 1$, pour $u \in]0;1[$,
$$\int_u^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \ln(1) - \ln(u) = -\ln(u) \xrightarrow{u\to 0} +\infty$$
Donc l'intégrale diverge également. $\square$

Théorème 18.3.

La fonction $f : t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 0$. Dans ce cas,
$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

Démonstration. Si $\alpha = 0$, $e^{-\alpha t} = 1$ et la fonction constante égale à 1 n'est pas intégrable sur $[0;+\infty[$. Sinon,
$$\int_0^x e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-\alpha t}}{-\alpha}\right]_0^x = -\frac{e^{-\alpha x}}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}$$
Cette intégrale converge si et seulement si $\alpha > 0$, et dans ce cas
$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^x e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\alpha}$$

$\square$

Théorème 18.4.

La fonction $f : t \mapsto \ln(t)$ est intégrable sur $]0;1]$, et on a

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

Démonstration. Soit $a \in]0;1[$. Par intégration par parties, ou en utilisant une primitive de ln, on a

$$\int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = [t\ln(t) - t]_a^1 = -1 - a\ln(a) + a$$

Or, on a $\lim_{a\to 0} a\ln(a) = 0$ (croissance comparée). Par somme, $\lim_{a\to 0} \int_a^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Ainsi, l'intégrale converge, et

$$\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t = -1$$

□

2) Majoration

Théorème 18.5.

Soient f et g deux fonctions continues sur l'intervalle $[a;b[$. On suppose que

$$\forall\ x \in [a;b[, 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$$

Alors, si $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente, et on a

$$0 \leqslant \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$$

Remarque 4. — Attention : il faut absolument que f et g soient positives.

Remarque 5. — Il suffit que l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ soit vraie au voisinage de b pour que le résultat puisse tout de même s'appliquer.

Exemple 2. — Montrer que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. Tout d'abord, $t \mapsto \frac{1}{t+t^2}$ est continue sur $[1;+\infty[$. Remarquons que pour tout $t \geqslant 1$ on a $t+t^2 \geqslant t^2$, soit

$$0 \leqslant \frac{1}{t+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Or, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge (intégrale de Riemman avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison, l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

3) Equivalences et négligeabilité

Théorème 18.6.

Soient f et g deux fonctions continues, **positives** sur l'intervalle $[a;b[$. On suppose que

$$f(x) \sim_b g(x)$$

Alors, $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, si et seulement si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

Remarque 6. — Attention : il faut absolument que f et g soient positives, ou a minima, de signe constant (si f et g sont négatives, on peut raisonner sur $-f$ et $-g$).

Exercice 1. — Traiter le cas de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t+t^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'équivalents.

Solution. Par équivalences usuelles :

$$\frac{1}{t+t^2} \sim_{+\infty} \frac{1}{t^2}$$

Les deux fonctions sont continues et positives sur $[1;+\infty[$, et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente (Riemann avec $\alpha = 2 > 1$). Par comparaison de fonctions positives, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 18.7.

Soient f et g deux fonctions continues, **positives** sur l'intervalle $[a;b[$. On suppose que

$$f(x) = o_b\big(g(x)\big)$$

Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est également convergente.

Remarque 7. — Attention : il faut absolument que f et g soient positives.

Méthode 18.1.

La plupart du temps, on essaiera de comparer à l'une des intégrales de références, et principalement les intégrales de Riemann convergentes.

Exemple 3. — Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. $t \mapsto t\mathrm{e}^{-t}$ est continue sur $[1;+\infty[$. On constate que

$$\frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1/t^2} = t^3\mathrm{e}^{-t} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Ainsi, $te^{-t} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Puisque les deux fonctions sont positives, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ converge (intégrale de Riemann), par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\int_1^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$ converge également.

4) Méthode d'étude

Méthode 18.2.

Pour montrer qu'une intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge :

① On étudier tout d'abord la continuité de la fonction sur $]a;b[$.

② On vérifie en quel(s) point(s) a, b ou les deux, l'intégrale est impropre.

③ On utilise les théorèmes de majoration ou d'équivalence pour montrer que l'intégrale converge.

Exemple 4. — Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

Solution. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et positive sur $[0;+\infty[$. L'intégrale est donc impropre en $+\infty$. Or, au voisinage de $+\infty$:

$$\mathrm{e}^{-t^2} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

En effet,

$$\frac{\mathrm{e}^{-t^2}}{1/t^2} = t^2\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée}$$

Puisque $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est positive, et que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, par comparaison de fonctions positives, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

5) Changement de variable

L'intégration par partie et le changement de variable, sous condition de convergence de chacune des intégrales, sont encore valables.

Proposition 18.8.

Soit f une fonction continue sur $]a;b[$. Soit φ une fonction **strictement croissante** de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\alpha;\beta[$, avec

$$\lim_{t\to\alpha} \varphi(t) = a \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\beta} \varphi(t) = b$$

Alors les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature. Si elles sont convergentes, on a alors

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)du$$

Remarque 8. — Le résultat est valable si φ est strictement décroissante, excepté que dans ce cas, les bornes α et β sont inversées.

Exemple 5. — Soit $\mathrm{I} = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$. Calculer I en effectuant le changement de variable $t = u^2$.

Solution. Remarquons déjà que $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}$ est continue sur $]0;+\infty[$. De plus,

$$f(t) \sim_{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}} \quad \text{et} \quad f(t) \sim_0 \frac{1}{\sqrt{t}}$$

Les trois fonctions sont positives, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{3/2}}$ est intégrable sur $[1;+\infty[$ (Intégrale de Riemann, $\frac{3}{2} > 1$) et la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^{1/2}}$ est intégrable sur $]0;1]$ (Intégrale de Riemann, $\frac{1}{2} < 1$). Ainsi, I est convergente.
Le changement de variable $t = u^2$ sur $[0;+\infty[$ est de classe $\mathscr{C}^1$, strictement croissant sur $[0;+\infty[$. Par changement de variable, l'intégrale étant convergente :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}+t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{u+u^2\times u}(2u du) \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2} du\end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^a \frac{1}{1+u^2} = [\arctan(u)]_0^a = \arctan(a) \underset{a\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{2}$$

Bilan : $\mathrm{I} = 2 \times \frac{\pi}{2} = \pi$.

III. Convergence absolue

1) Définition

Définition 2. — Soit f une fonction continue sur $[a;b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge absolument** sur $[a;b[$ si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Remarque 9. — Rigoureusement, on dit que f est **intégrable** sur $[a;b[$ si $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 18.9.

Soit f une fonction continue sur $[a;b[$. Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors elle est convergente, et on a

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. Admis. □

Remarque 10. — ⚠ La réciproque n'est pas vraie. Une intégrale peut être convergente, sans être absolument convergente. On dit alors que l'intégrale est **semi-convergente**. On pourra regarder l'exercice 6.

2) Intégrale convergeant absolument vers 0

Proposition 18.10.

Soit f une fonction continue sur $]a;b[$. f est nulle sur $]a;b[$ si et seulement si

$$\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t = 0$$

Démonstration. Si f est nulle, alors son intégrale existe et est nulle. La réciproque se montre comme la proposition similaire du chapitre *Intégration sur un segment.* □

Exercices

Intégrales impropres

Exercice 2. — Déterminer si les intégrales suivantes convergent ou divergent. Si elles convergent, calculer leur valeur.

$$A = \int_0^{+\infty} \frac{x}{(1+x^2)^2}dx \quad B = \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t^3}\,\mathrm{d}t$$
$$C = \int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad D = \int_3^{+\infty} \frac{du}{u\ln u}$$

Exercice 3. — Démontrer la convergence et déterminer la valeur de

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x - e^{-x}}dx$$

On pourra dériver la fonction $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)$.

Sujets

Exercice 4. — Pour tout $a > 0$, et pour tout entier n, on note

$$I_n(a) = \int_0^a t^n e^{-t}\,\mathrm{d}t$$

On note également

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

L'objectif du problème est de montrer que les intégrales I_n existent, et de calculer leur valeur.

1. Montrer que pour tout entier n, I_n converge.
2. Calculer $I_0(a)$, puis déterminer la valeur de I_0.
3. Trouver une relation de récurrence entre $I_{n+1}(a)$ et $I_n(a)$.
4. Ecrire la relation liant I_n et I_{n+1}. Déterminer alors la valeur de I_n en fonction de n.

Exercice 5. — Soient I, J et K les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x))dx, \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos(x))dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\tan(x))dx$$

1. A l'aide d'un développement limité d'ordre 1, montrer que $\ln(\sin(x)) \sim_0 \ln(x)$. En déduire que I est convergente.
2. Montrer que, au voisinage de 0, $\ln(\tan(x)) \sim_0 x$ et que $\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right) \sim -\ln(x)$. En déduire que K est convergente.
3. En posant le changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - x$ dans I, montrer que J est convergente et J = I.
4. Montrer que

$$I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{\sin(2x)}{2}\right)dx$$

5. En posant $v = 2x$, montrer que $\mathrm{I} + \mathrm{J} = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x - \dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.
6. En écrivant $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x = \mathrm{I} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln(\sin(x))\,\mathrm{d}x$ (la dernière intégrale étant convergente puisque les deux autres le sont), et en posant $v = x - \frac{\pi}{2}$ dans la dernière intégrale, montrer que $\mathrm{I} = -\dfrac{\pi}{2}\ln(2)$.
7. En déduire la valeur de K.

Exercice 6. — Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$.

1. Montrer que f peut être prolongée par continuité en 0.
2. Soient $0 < a < b$ deux réels. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 2\left[\frac{\sin^2(t/2)}{t}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$$
Indication : on utilisera la formule $\cos(t) = \cos(2\times t/2) = 2\sin^2(t/2) - 1$ *et on posera un changement de variable* $u = 2t$ *pour terminer.*
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
5. Montrer que
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left|\frac{\sin(t)}{t}\right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}$$
En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ n'est pas absolument convergente.

