EDHEC

Voie E

Mardi 3 mai 2016

---

*La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

***L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit**. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On désigne par Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$ et par I la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
On note $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est : $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\mathrm{A}^2 - 4\mathrm{A}$ puis déterminer un polynôme annulateur de A de degré 2.
2. (a) En déduire la seule valeur propre de A (donc aussi de f).
   (b) La matrice A est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
   ‘
3. Déterminer une base (u_1, u_2) du sous-espace propre de f associé à la valeur propre de f.
4. (a) On pose $u_3 = e_1 + e_2 + e_3$. Montrer que la famille (u_1, u_2, u_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Vérifier que la matrice T de f dans la base (u_1, u_2, u_3) est triangulaire et que ses éléments diagonaux sont tous égaux à 2.
   (c) En écrivant $\mathrm{T} = 2\mathrm{I} + \mathrm{N}$, déterminer, pour tout entier naturel n, la matrice T^n comme combinaison linéaire de I et N, puis de I et T.
5. (a) Expliquer pourquoi l'on a :
   $$\forall\ n \in \mathbb{N}, \mathrm{A}^n = n2^{n-1}\mathrm{A} - (n-1)2^n\mathrm{I}$$
   (b) Utiliser le polynôme annulateur obtenu à la première question pour déterminer A^{-1} en fonction de I et de A.
   (c) Vérifier que la formule trouvée à la question 5a) reste valable pour $n = -1$.

Exercice 2

Pour chaque entier naturel n, on définit la fonction f_n par : $\forall\ x \in [n; +\infty[, \quad f_n(x) = \displaystyle\int_n^x e^{\sqrt{t}}\,dt.$

1. Étude de f_n.
   (a) Montrer que f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[n; +\infty[$ puis déterminer $f_n'(x)$ pour tout x de $[n; +\infty[$. Donner le sens de variation de f_n.

(b) En minorant $f_n(x)$, établir que $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

(c) En déduire que pour chaque entier naturel n, il existe un unique réel, noté u_n, élément de $[n;+\infty[$, tel que $f_n(u_n) = 1$.

2. Étude de la suite (u_n).

(a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(b) Montrer que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad e^{-\sqrt{u_n}} \leqslant u_n - n \leqslant e^{-\sqrt{n}}$.

3. (a) Utiliser la question $2b$) pour compléter les commandes Scilab suivantes afin qu'elles permettent d'afficher un entier n pour lequel $u_n - n$ est inférieur ou égal à 10^{-4}.

```
n=0
while ------
n = -----
end
disp(n)
```

(b) Le script ci-dessus affiche l'une des trois valeurs $n = 55$, $n = 70$ et $n = 85$. Préciser laquelle en prenant $2,3$ comme valeur approchée de $\ln 10$.

4. On pose $v_n = u_n - n$.

(a) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

(b) Établir que, pour tout réel x supérieur ou égal à -1, on a : $\sqrt{1+x} \leqslant 1 + \dfrac{x}{2}$.

(c) Vérifier ensuite que : $\forall\ n \in \mathbb{N},\quad e^{-\sqrt{u_n}} \geqslant e^{-\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{v_n}{2\sqrt{n}}\right)$.

(d) Déduire de l'encadrement obtenu en $2b$) que : $u_n - n \underset{+\infty}{\sim} e^{-\sqrt{n}}$.

Exercice 3

Dans cet exercice, toutes les variables aléatoires sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$. On désigne par p un réel de $]0,1[$.

On considère deux variables aléatoires indépendantes U et V, telles que U suit la loi uniforme sur $[-3,1]$, et V suit la loi uniforme sur $[-1,3]$.

On considère également une variable aléatoire Z, indépendante de U et V, dont la loi est donnée par :

$$\mathbb{P}(\mathrm{Z} = 1) = p \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\mathrm{Z} = -1) = 1 - p$$

Enfin, on note X la variable aléatoire, définie par :

$$\forall\ \omega \in \Omega, \quad \mathrm{X}(\omega) = \begin{cases} \mathrm{U}(\omega) & \text{si } \mathrm{Z}(\omega) = 1 \\ \mathrm{V}(\omega) & \text{si } \mathrm{Z}(\omega) = -1 \end{cases}$$

On note $\mathrm{F_X}, \mathrm{F_U}$ et $\mathrm{F_V}$ les fonctions de répartition respectives des variables X, U et V.

1. Donner les expressions de $\mathrm{F_U}(x)$ et $\mathrm{F_V}(x)$ selon les valeurs de x.

2. (a) Établir, grâce au système complet d'événements $((\mathrm{Z}=1), (\mathrm{Z}=-1))$, que :

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F_X}(x) = p\mathrm{F_U}(x) + (1-p)\mathrm{F_V}(x)$$

(b) Vérifier que $\mathrm{X}(\Omega) = [-3,3]$ puis expliciter $\mathrm{F_X}(x)$ dans les cas :

$$x < -3, \quad -3 \leqslant x \leqslant -1, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \quad 1 \leqslant x \leqslant 3 \quad \text{et} \quad x > 3$$

(c) On admet que X est une variable aléatoire à densité. Donner une densité f_X de la variable aléatoire X.

(d) Établir que X admet une espérance E(X) et une variance V(X), puis les déterminer.

3. On se propose de montrer d'une autre façon que X possède une espérance et un moment d'ordre 2 puis de les déterminer.

(a) Vérifier que l'on a : $X = U\dfrac{1+Z}{2} + V\dfrac{1-Z}{2}$.

(b) Déduire de l'égalité précédente que X possède une espérance et retrouver la valeur de E(X).

(c) En déduire également que X possède un moment d'ordre 2 et retrouver la valeur de $E(X^2)$.

4. (a) Soit T une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p. Déterminer la loi de $2T-1$.

(b) On rappelle que `grand(1,,1,"unf",a,b)` et `grand(1,1,"bin",1,p)` sont des commandes `Scilab` permettant de simuler respectivement une variable aléatoire à densité suivant la loi uniforme sur $[a, b]$ et une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre p.
Écrire des commandes `Scilab` permettant de simuler U, V, Z puis X.

Problème

Partie 1 : questions préliminaires

Dans cette partie, x désigne un réel élément de $[0,1[$.

1. (a) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et pour tout t de $[0, x]$, simplifier la somme $\sum\limits_{p=1}^{n} t^{p-1}$.

(b) En déduire que : $\sum\limits_{p=1}^{n} \dfrac{x^p}{p} = -\ln(1-x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$.

(c) Établir par encadrement que l'on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt = 0$.

(d) En déduire que : $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{x^k}{k} = -\ln(1-x)$.

2. Soit m un entier naturel fixé. À l'aide de la formule de triangle de Pascal, établir l'égalité :

$$\forall\, q \geqslant m, \quad \sum_{k=m}^{q} \binom{k}{m} = \binom{q+1}{m+1}$$

3. Soit n un entier naturel non nul. On considère une suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, suivant toutes la loi géométrique de paramètre x, et on pose $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.

(a) Déterminer $S_n(\Omega)$ puis établir que, pour tout entier k supérieur ou égal à $n+1$), on a :

$$P(S_{n+1} = k) = \sum_{j=n}^{k-1} P\left(\left(S_n = j\right) \cap \left(X_{n+1} = k-j\right)\right)$$

(b) En déduire, par récurrence sur n, que la loi de S_n est donnée par :

$$\forall\, k \in [\![n, +\infty]\!], \quad P(S_n = k) = \binom{k-1}{n-1} x^n (1-x)^{k-n}$$

(c) En déduire, pour tout x de $]0,1[$ et pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \binom{k-1}{n-1} (1-x)^{k-n} = \frac{1}{x^n}$$

(d) On rappelle que la commande `grand(1,n,"geom",p)` permet à `Scilab` de simuler n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi géométrique de paramètre p.
Compléter les commandes `Scilab` suivantes pour qu'elles simulent la variable aléatoire S_n.

```
n = input('entrez une valeur de n supérieure à 1  : ')
S = -----
disp(S)
```

Partie 2 : étude d'une variable aléatoire.

Dans cette partie, on désigne par p un réel de $]0,1[$ et on pose $q = 1-p$.
On considère la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad u_k = -\frac{q^k}{k\ln p}$$

1. (a) Vérifier que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ est à termes positifs.

   (b) Montrer, en utilisant un résultat de la partie 1, que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} u_k = 1$.

On considère dorénavant une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(X = k) = u_k$$

2. (a) Montrer que X possède une espérance et la déterminer.

   (b) Montrer également que X possède une variance et vérifie que $V(X) = \dfrac{-q(q+\ln p)}{(p\ln p)^2}$.

3. Soit l un entier naturel non nul. On considère une variable aléatoire Y dont la loi, conditionnellement à l'événement $(X = k)$, est la loi de paramètre k et p.

   (a) Montrer que $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ puis utiliser la formule des probabilités totales, ainsi que la question 1) de la partie 1, pour montrer que :
   $$\mathbb{P}(Y = 0) = 1 + \frac{\ln(1+q)}{\ln(p)}$$

   (b) Après avoir montré que, pour tout couple (k,n) de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, on a $\dfrac{\binom{k}{n}}{k} = \dfrac{\binom{k-1}{n-1}}{n}$, établir que, pour tout entier naturel n non nul, on a : $\mathbb{P}(Y = n) = -\dfrac{p^n q^n}{n\ln p}\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}(q^2)^{k-n}$.
   En déduire, grâce à la question 3) de la première partie, l'égalité :
   $$\mathbb{P}(Y = n) = -\frac{q^n}{n(1+q)^n\ln p}$$

   (c) Vérifier que l'on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\mathbb{P}(Y = k) = 1$.

   (d) Montrer que Y possède une espérance et donner son expression en fonction de $\ln p$ et q.

   (e) Montrer aussi que Y possède une variance et que l'on a :
   $$V(Y) = -\frac{q(q+(1+q)\ln p)}{(\ln p)^2}$$