EML

Voie E

Mardi 26 avril 2016

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On note I et A les matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ définies par :

$$\mathrm{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathscr{E}$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ défini par :

$$\mathscr{E} = \left\{ \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} ; \ (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}.$$

PARTIE I : Étude de la matrice A.

1. Calculer A^2.
2. Montrer que la famille $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{A}^2)$ est libre.
3. (a) Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer une matrice P de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible dont tous les coefficients de la première ligne sont égaux à 1 et une matrice D de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant telles que : $\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$.
4. Montrer : $\mathrm{A}^3 = 2\mathrm{A}$.

PARTIE II : Étude d'une application définie sur $\mathscr{E}$.

5. Montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et que la famille $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{A}^2)$ est une base de $\mathscr{E}$. En déduire la dimension de $\mathscr{E}$.
6. Montrer que, pour toute matrice M de $\mathscr{E}$, la matrice AM appartient à $\mathscr{E}$.

On note f l'application de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}$ qui, à toute matrice M de $\mathscr{E}$, associe AM.

7. Vérifier que f est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathscr{E}$.
8. Former la matrice F de f dans la base $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{A}^2)$.
9. (a) Montrer : $f \circ f \circ f = 2f$
   (b) En déduire que toute valeur propre λ de f vérifie : $\lambda^3 = 2\lambda$.
   (c) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de f.
10. L'endomorphisme f est-il bijectif ? diagonalisable ?
11. Déterminer une base de Im (f) et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
12. (a) Résoudre l'équation $f(\mathrm{M}) = \mathrm{I}+\mathrm{A}^2$, d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{E}$.
    (b) Résoudre l'équation $f(\mathrm{N}) = \mathrm{A}+\mathrm{A}^2$, d'inconnue $\mathrm{N} \in \mathscr{E}$.

Solution. **PARTIE I**

1. Rapidement $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Soient a, b, c trois réels tels que $a\mathrm{I} + b\mathrm{A} + c\mathrm{A}^2 = 0_3$. On obtient alors

$$\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et il vient alors $a = b = c = 0$.
Bilan : la famille $(\mathrm{I}, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2)$ est libre.

3. (a) La matrice A est une matrice réelle symétrique. Par théorème, elle est diagonalisable.

   (b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la matrice $\mathrm{A} - \lambda\mathrm{I}$ soit non inversible. On résout ainsi le système, d'inconnue (x, y, z)

$$(\mathrm{S}) \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -\lambda x & + & y & & & = & 0 \\ x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ -\lambda x & + & y & & & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array} \right.$$

soit

$$(\mathrm{S}) \sim \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ & & (1-\lambda^2) y & + & \lambda z & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array} \right. \sim \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & (1-\lambda^2) y & + & \lambda z & = & 0 \end{array} \right.$$

et finalement

$$(\mathrm{S}) \sim \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & \lambda y & + & z & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \\ & & & & (\lambda - \lambda(\lambda^2 - 1)) z & = & 0 \end{array} \right.$$

Le système n'est pas de Cramer si $(\lambda - \lambda(\lambda^2 - 1)) = 0$ soit si

$$-\lambda^3 + 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda(2 - \lambda^2) = 0 \Leftrightarrow \lambda(\sqrt{2} - \lambda)(\sqrt{2} + \lambda) = 0$$

Les trois valeurs propres sont donc 0, $\sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. D'après le système précédent :

$$\mathrm{E}_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{E}_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\mathrm{E}_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

On pose alors $\mathrm{D} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Alors P est inversible (matrice de passage) et

$$\mathrm{A} = \mathrm{PDP}^{-1}$$

4. D'après ce qui précède,

$$A^3 = PD^3P^{-1} = P\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}P^{-1} = P(2D)P^{-1} = 2PDP^{-1} = 2A$$

PARTIE II

5. Remarquons que

$$\begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = aI + bA + cA^2$$

Ainsi,

$$\mathscr{E} = \mathrm{Vect}(I, A, A^2)$$

Donc $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, dont (I, A, A^2) est une famille génératrice. Comme de plus cette famille est libre (question 1), on en déduit qu'elle forme une base de
E.
Bilan : $\dim(\mathscr{E}) = 3$.

> **Remarque.** — On peut montrer que $\mathscr{E}$ est un sous-espace vectoriel "à la main" :
>
> Soient $A = \begin{pmatrix} a_1+c_1 & b_1 & c_1 \\ b_1 & a_1+2c_1 & b_1 \\ c_1 & b_1 & a_1+c_1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a_2+c_2 & b_2 & c_2 \\ b_2 & a_2+2c_2 & b_2 \\ c_2 & b_2 & a_2+c_2 \end{pmatrix}$ deux matrices de $\mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors
>
> $$\lambda A + B = \begin{pmatrix} \lambda(a_1+c_1)+(a_2+c_2) & \lambda b_1 + b_2 & \lambda c_1 + c_2 \\ \lambda b_1 + b_2 & \lambda(a_1+2c_1)+(a_2+2c_2) & \lambda b_1 + b_2 \\ \lambda c_1 + c_2 & \lambda b_1 + b_2 & \lambda(a_1+c_1)+(a_2+c_2) \end{pmatrix}$$
>
> et donc
>
> $$\lambda A + b = \begin{pmatrix} (\lambda a_1+a_2)+(\lambda c_1+c_2) & (\lambda b_1+b_2) & (\lambda c_1+c_2) \\ (\lambda b_1+b_2) & (\lambda a_1+a_2)+2(\lambda c_1+c_2) & (\lambda b_1+b_2) \\ (\lambda c_1+c_2) & (\lambda b_1+b_2) & (\lambda a_1+a_2)+(\lambda c_1+c_2) \end{pmatrix}$$
>
> soit
>
> $$\lambda A + B = \begin{pmatrix} a_3+c_3 & b_3 & c_3 \\ b_3 & a_3+2c_3 & b_3 \\ c_3 & b_3 & a_3+c_3 \end{pmatrix}$$
>
> en posant $a_3 = \lambda a_1 + a_2$, $b_3 = \lambda b_1 + b_2$ et $c_3 = \lambda c_1 + c_2$. Ainsi, $\lambda A + B \in \mathscr{E}$.

6. Soit $M = aI + bA + cA^2 \in \mathscr{E}$. Alors

$$AM = A(aI + bA + cA^2) = aA + bA^2 + cA^3 \underbrace{=}_{q°4} aA + bA^2 + 2cA = 0I + (a+2c)A + bA^2 \in \mathscr{E}$$

7. Soient M et N deux matrices de $\mathscr{E}$, et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors

$$f(\lambda M + N) = A(\lambda M + N) = A(\lambda M) + AN = \lambda AM + AN = \lambda f(M) + f(N)$$

Ainsi f est une application linéaire de $\mathscr{E}$ dans lui-même : c'est un endomorphisme de $\mathscr{E}$.

8. On a $f(I) = A$, $f(A) = A^2$ et $f(A^2) = A^3 = 2A$. Ainsi, dans la base (I, A, A^2), la matrice de f est

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. (a) Remarquons que $F^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2F$. Donc, puisque F est la matrice de f dans une base de $\mathscr{E}$, on a $f \circ f \circ f = 2f$.

> **Remarque.** — On peut aussi prendre $M \in \mathscr{E}$ et constater que
>
> $$f \circ f \circ f(M) = f(f(f(M))) = f(f(AM)) = f(A(AM)) = f(A^2M) = A(A^2M) = A^3M = 2AM = 2f(M)$$

   (b) Soit $P(X) = X^3 - 2X$. D'après ce qui précède, P est un polynôme annulateur de f. Par théorème, les valeurs propres vérifie $P(\lambda) = 0$, c'est-à-dire $\lambda^3 = 2\lambda$.

   (c) Les valeurs propres possibles sont donc $0, \sqrt{2}$ et $-\sqrt{2}$. Après étude, on constate que, pour la matrice F

$$F_0 = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \quad F_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad F_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

   Ainsi, les espaces propres de f sont

$$E_0 = \mathrm{Vect}(-2I + A^2), \quad E_{-\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(-\sqrt{2}A + A^2) \quad \text{et} \quad E_{\sqrt{2}} = \mathrm{Vect}(\sqrt{2}A + A^2)$$

10. Remarquons que 0 est valeur propre de f (puisque E_0 n'est pas réduit à 0). Donc f n'est pas inversible. Enfin, la somme des dimensions des espaces propres est égale à 3, la dimension de $\mathscr{E}$: f est diagonalisable.

11. D'après ce qui précède, une base de $\mathrm{Ker}(f)$ est $-2I + A^2$.
Enfin, on constate que

$$\mathrm{Im}\,(F) = \{FX, X \in \mathbb{R}^3\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ x + 2z \\ y \end{pmatrix}, \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

La famille $\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ étant libre, elle forme une base de $\mathrm{Im}\,(\mathrm{F})$, et donc $(\mathrm{A},\mathrm{A}^2)$ forme une base de $\mathrm{Im}\,(f)$.

On aurait pu aussi prendre la base des espaces propres autres que celui associé à 0

12. (a) On cherche $\mathrm{M} = a\mathrm{I} + b\mathrm{A} + c\mathrm{A}^2$ tel que $f(\mathrm{M}) = \mathrm{I} + \mathrm{A}^2$, c'est-à-dire

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{A}^2 + 2c\mathrm{A} = \mathrm{I} + \mathrm{A}^2 \Leftrightarrow \mathrm{I} - (a+2c)\mathrm{A} + (1-b)\mathrm{A}^2 = 0_3$$

La famille $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{A}^2)$ étant libre, et le coefficient devant I étant non nul, une telle combinaison n'existe pas.

Bilan : l'équation $f(\mathrm{M}) = \mathrm{I} + \mathrm{A}^2$ n'admet pas de solution.

(b) De la même manière, en notant $\mathrm{N} = a\mathrm{I} + b\mathrm{A} + c\mathrm{A}^2$, on obtient

$$a\mathrm{A} + b\mathrm{A}^2 + 2c\mathrm{A} = \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 \Leftrightarrow (a+2c-1)\mathrm{A} + (b-1)\mathrm{A}^2 = 0_3$$

La famille $(\mathrm{I},\mathrm{A},\mathrm{A}^2)$ étant libre, on obtient alors

$$a+2c-1=0 \quad \text{et} \quad b-1=0$$

c'est-à-dire $b=1$ et $a = 1-2c$.

Bilan : l'ensemble des solutions de l'équation $f(\mathrm{N}) = \mathrm{A} + \mathrm{A}^2$ est

$$\mathscr{S} = \{(1-2c)\mathrm{I} + \mathrm{A} + c\mathrm{A}^2, \quad c \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 2

On considère l'application $f : [0;+\infty[\to \mathbb{R}$ définie, pour tout t de $[0;+\infty[$, par :

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t\ln(t) & \text{si } t \neq 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

On admet : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

PARTIE I : Étude de la fonction f

1. Montrer que f est continue sur $[0;+\infty[$.
2. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et calculer, pour tout t de $]0;+\infty[$, $f'(t)$ et $f''(t)$.
3. Dresser le tableau de variations de f. On précisera la limite de f en $+\infty$.
4. On note C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
   (a) Montrer que C admet une tangente en O et préciser celle-ci.
   (b) Montrer que C admet un point d'inflexion et un seul noté I, et préciser les coordonnées de I.
   (c) Tracer l'allure de C.
5. Montrer que l'équation $f(t) = 1$, d'inconnue $t \in [0;+\infty[$, admet une solution et une seule et que celle-ci est égale à 1.

PARTIE II : Étude d'une fonction F de deux variables réelles

On considère l'application $F :]0;+\infty[^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$, définie, pour tout (x,y) de $]0;+\infty[^2$, par :

$$F(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

6. Calculer les dérivées partielles premières de F en tout (x,y) de $]0;+\infty[^2$.
7. (a) Soit $(x,y) \in]0;+\infty[^2$. Montrer que (x,y) est un point critique de F si et seulement si :

$$x > 1, \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \quad \text{et} \quad f(\ln(x)) = 1$$

   (b) Établir que F admet un point critique et un seul et qu'il s'agit de (e,e).
8. La fonction F admet-elle un extremum local en (e,e) ?

PARTIE III : Étude d'une suite récurrente

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

9. Montrer : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$.
10. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
11. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite. (On pourra étudier les variations de la fonction $t \mapsto t - \ln(t)$.).
12. Écrire un programme en Scilab qui calcule et affiche un entier naturel N tel que $1 - u_n < 10^{-4}$.

Solution. **PARTIE I**

1. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme somme de $t \mapsto t^2$, continue (polynôme) et $t \mapsto -t\ln(t)$, continue comme produit de deux fonctions continues.
   De plus, en utilisant les croissances comparées en 0 :

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{t\to 0^+} t^2 - t\ln(t) = 0 = f(0)$$

Ainsi, f est également continue en 0.
Bilan : f est continue sur $[0;+\infty[$.

2. De même, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ comme somme et produit de fonctions polynômes et logarithme, de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[$. On en déduit alors que, pour tout $t>0$:

$$f'(t)=2t-\ln(t)-t\frac{1}{t}=2t-\ln(t)-1 \quad \text{et} \quad f''(t)=2-\frac{1}{t}$$

3. Remarquons que $f''(t)>0 \Leftrightarrow 2>\frac{1}{t} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<t$ en utilisant la stricte décroissante de la fonction inverse sur $\mathbb{R}_+^*$. On obtient alors le tableau de f' suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$		
$f''(t)$	$\|\|$	$-$		$+$	
$f'(t)$	$\|\|$	$\searrow$	$-\ln\left(\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

Or $-\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\ln(2)>0$. Ainsi, f' est strictement positive sur $]0;+\infty[$. On obtient finalement le tableau de variations suivant :

t	0		$+\infty$
$f'(t)$	$\|\|$	$+$	
$f(t)$	$\|\|$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

En constatant que, pour $t>0$, $t^2-t\ln(t)=t^2\left(1-\dfrac{\ln(t)}{t}\right)$, puisque $1-\frac{\ln(t)}{t}\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}1$ par croissance comparée, on en déduit que par produit

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$$

4. (a) Constatons que, pour $t>0$ on a

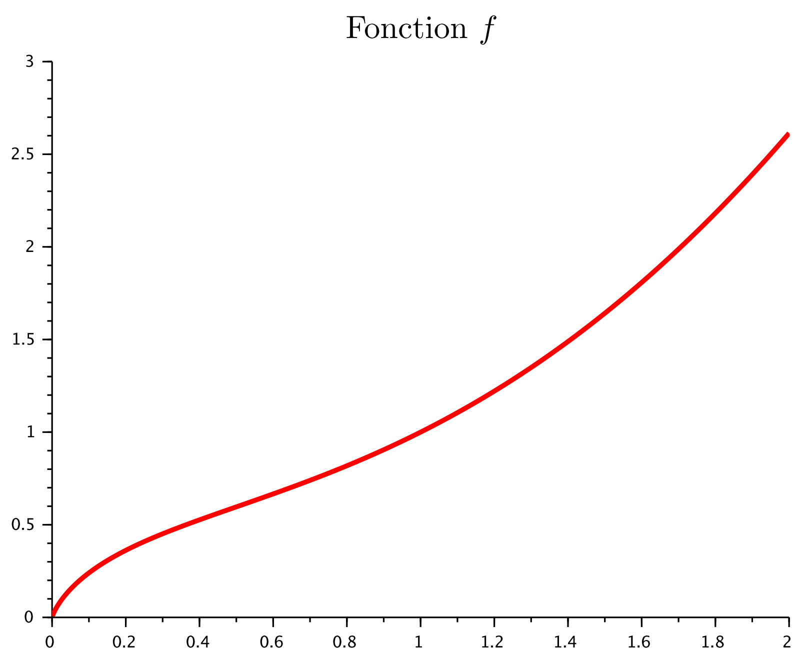
$$\frac{f(t)-f(0)}{t}=\frac{t^2-t\ln(t)}{t}=t-\ln(t)\underset{t\to0^+}{\longrightarrow}+\infty$$

Ainsi, f n'est pas dérivable en 0, et la courbe C admet donc une tangente verticale en O.

(b) D'après l'étude de la dérivée seconde, celle-ci s'annule en changeant de signe au point d'abscisse $t=\frac{1}{2}$. Ainsi, C admet un unique point d'inflexion, de coordonnées

$$\mathrm{I}\left(\frac{1}{2};f\left(\frac{1}{2}\right)\right) \quad \text{soit} \quad \mathrm{I}\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)\right)$$

(c) On obtient l'allure suivante :



5. D'après l'étude précédente, f est continue et strictement croissante sur $[0;+\infty[$. De plus, $f([0;+\infty[) = [0;+\infty[$ et $1 \in [0;+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, l'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution sur $[0;+\infty[$.
On constate de plus que $f(1) = 1$, donc 1 est la seule solution de l'équation $f(x) = 1$.

PARTIE II

6. Remarquons déjà que F est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$ car $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ le sont (polynomiale), et $t \mapsto \ln(t)$ est $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a alors, pour $(x, y) \in]0;+\infty[^2$:
$$\partial_1 \mathrm{F}(x, y) = \ln(y) - \frac{y}{x} \quad \text{et} \quad \partial_2 \mathrm{F}(x, y) = \frac{x}{y} - \ln(x)$$

7. (a) $(x, y) \in]0;+\infty[^2$ est un point critique si et seulement si
$$\partial_1 \mathrm{F}(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad \partial_2 \mathrm{F}(x, y) = 0 \Leftrightarrow \ln(y) - \frac{y}{x} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{x}{y} - \ln(x) = 0$$
ce qui est équivalent, en multipliant par x ou $y \neq 0$ à
$$x \ln(y) - y = 0 \quad \text{et} \quad x - y \ln(x) = 0$$
Or,
$$x = y \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{\ln(x)} \Leftrightarrow x > 1 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{\ln x}$$

donc

$$\partial_1 F(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \partial_2 F(x,y)=0 \Leftrightarrow x>1, \quad y=\frac{x}{\ln x} \quad \text{et} \quad x\ln\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)-\frac{x}{\ln(x)}=0$$

et finalement

$$\partial_1 F(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \partial_2 F(x,y)=0 \Leftrightarrow x>1, \quad y=\frac{x}{\ln x} \quad \text{et} \quad (\ln(x))^2-\ln(x)\ln(\ln(x))=1=f(\ln(x))$$

(b) D'après la question 5, $f(\ln(x))=1$ si et seulement si $\ln(x)=1$, soit $x=e$. Ainsi,

$$\partial_1 F(x,y)=0 \quad \text{et} \quad \partial_2 F(x,y)=0 \Leftrightarrow x=e \quad \text{et} \quad y=\frac{e}{\ln(e)}=e$$

Ainsi, F admet un unique point critique, en (e,e).

8. F étant de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]0;+\infty[^2$, on peut déterminer les dérivées partielles d'ordre 2. Ainsi, pour $(x,y)\in]0;+\infty[^2$:

$$\partial_{1,1}F(x,y)=\frac{y}{x^2}, \quad \partial_{1,2}F(x,y)=\partial_{2,1}F(x,y)=\frac{1}{y}-\frac{1}{x} \quad \text{et} \quad \partial_{2,2}F(x,y)=-\frac{x}{y^2}$$

Au point (e,e), la matrice hessienne vaut donc

$$\nabla^2 F(e,e)=\begin{pmatrix} \frac{1}{e} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{e} \end{pmatrix}$$

La matrice est diagonale, ses valeurs propres sont donc $\frac{1}{e}$ et $-\frac{1}{e}$ qui sont de signes contraires.
Bilan : la fonction F admet donc un point col ou sel au point d'abscisse (e,e).

PARTIE III

9. On rappelle que f est croissante sur $]0;+\infty[$. Or $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\ln(2)>\frac{1}{2}$ et $f(1)=1$. Ainsi,

$$f\left(\left[\frac{1}{2};1\right]\right)=\left[\frac{1}{2};1\right]$$

L'intervalle étant stable par f, et puisque $u_0\in\left[\frac{1}{2};1\right]$, on en déduit que pour tout entier n, $u_n\in\left[\frac{1}{2};1\right]$. (*On peut le montrer par récurrence sur n si nécessaire*)

10. La fonction f étant strictement croissante sur $[0;+\infty[$, la suite (u_n) est monotone. Puisque $u_0=\frac{1}{2}<u_1$, on en déduit que (u_n) est croissante.
On peut également procéder par récurrence : soit P la proposition définie pour tout entier n par P_n : "$u_n\leqslant u_{n+1}$".
— Pour $n=0$, on a $u_0=\frac{1}{2}$ et $u_1=f(u_0)\geqslant\frac{1}{2}$ d'après ce qui précède. Donc P_0 est vraie.
— Supposons la proposition P_n vraie pour un certain entier n fixé. Ainsi, $u_n\leqslant u_{n+1}$ par hypothèse de récurrence. Mais par croissance de f, on a alors $f(u_n)\leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1}\leqslant u_{n+2}$: P_{n+1} est donc vraie.

D'après le principe de récurrence, on en déduit alors que P_n est vraie pour tout entier n.
Bilan : la suite (u_n) est croissante.

11. D'après les questions précédentes, (u_n) est croissante et majorée par 1. D'après le théorème de convergence monotone, (u_n) converge. Notons l sa limite. La fonction f étant continue sur $]0;+\infty[$, d'après le théorème de point fixe, l vérifie $l = f(l)$, c'est-à-dire $l^2 - l\ln(l) = l$. Puisque pour tout n, $u_n \in \left[\frac{1}{2};1\right]$, $l \neq 0$. Donc l vérifie
$$l - \ln(l) = 1$$
Soit $g : x \mapsto x - \ln(x)$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$. g est de $\mathscr{C}^1$ sur $]0;+\infty[$, et on a pour tout $x>0$, $g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	$\Vert$	$-$		$+$	
$g(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

Par somme, on a rapidement $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x - \ln(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right) = +\infty$ par produit et croissance comparée.
D'après le théorème de la bijection, l'équation $g(x) = 1$ admet donc une unique solution, qui vaut 1.
Bilan : (u_n) converge vers 1.

12. On cherche un algorithme de seuil. On obtient par exemple le programme suivant :

Programme Scilab 1 : Algo de seuil

```
// Valeur de U
U=1/2
// Valeur de n
n=0

while (1-U>10^(-4))
    n=n+1
    U=U^2-log(U)
end

 disp("n=",n)
```

Exercice 3

PARTIE I : Étude d'une variable aléatoire

On considère l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $t \in \mathbb{R}$, par : $\quad f(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$.

1. Vérifier que la fonction f est paire.
2. Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.

Dans toute la suite de l'exercice, on considère une variable aléatoire réelle X à densité, de densité f.

3. Déterminer la fonction de répartition de X.
4. (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ converge.

   (b) En utilisant l'imparité de la fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto t f(t)$, montrer que X admet une espérance et que l'on a : $\quad \mathbb{E}(X) = 0$.

PARTIE II : Étude d'une autre variable aléatoire

On considère l'application $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par : $\quad \varphi(x) = \ln(1+e^x)$.

5. Montrer que φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur une intervalle I à préciser.
6. Exprimer, pour tout y de I, $\varphi^{-1}(y)$.

On définit la variable aléatoire réelle Y définie par : $\quad Y = \varphi(X)$.

7. Justifier : $\quad \mathbb{P}(Y \leqslant 0) = 0$.
8. Déterminer la fonction de répartition de Y.
9. Reconnaître alors la loi de Y et donner, sans calcul, son espérance et sa variance.

PARTIE III : Étude d'une convergence en loi

On considère une suite de variable aléatoire réelles $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, mutuellement indépendantes, de même densité f, où f a été définie dans la partie I.
On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $\quad T_n = \max(X_1, \cdots, X_n) \quad$ et $\quad U_n = T_n - \ln(n)$.

10. (a) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la fonction de répartition de T_n.

    (b) En déduire : $\quad \forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \mathbb{P}(U_n \leqslant x) = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$.
11. En déduire que la suite de variables aléatoires $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire réelle à densité dont on précisera la fonction de répartition et une densité.

Solution.

PARTIE I

1. Remarquons que $\mathbb{R}$ est centré en 0. De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$f(-t) = \frac{e^{-(-t)}}{(1+e^{-(-t)})^2} = \frac{e^t}{(1+e^t)^2} = \frac{e^t(e^{-t})^2}{(1+e^t)^2(e^{-t})^2} = \frac{e^{-t}}{(e^{-t}+1)^2} = f(t)$$

   Ainsi, f est paire.

2. On constate que f est définie, positive sur $\mathbb{R}$ (car $e^{-t} > 0$ et un carré est positif). f est également continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de $t \mapsto e^{-t}$, continue et de $t \mapsto (1+e^{-t})^2$ continue et ne s'annulant pas.

Enfin, soit $\mathrm{A} > 0$. Alors

$$\int_0^{\mathrm{A}} f(t)dt = \left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_0^{\mathrm{A}} = \frac{1}{1+e^{-\mathrm{A}}} - \frac{1}{2}$$

Par quotient, $\lim\limits_{\mathrm{A}\to+\infty} \frac{1}{1+e^{-\mathrm{A}}} = 1$, donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t)$ converge et vaut $\frac{1}{2}$. Par parité de f, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$.
Bilan : f est une densité.

3. Notons $\mathrm{F_X}$ la fonction de répartition de X. Par définition, pour tout réel x,

$$\mathrm{F_X}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\int_{\mathrm{A}}^{x} f(t)dt = \lim_{\mathrm{A}\to-\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-t}}\right]_{\mathrm{A}}^{x}$$

et donc

$$\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R},\quad \mathrm{F_X}(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}}$$

4. (a) $t\mapsto tf(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Donc $\int_0^1 tf(t)dt$ converge. Enfin, remarquons que

$$t^2(tf(t)) = \frac{t^3e^{-t}}{(1+e^{-t})^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ par croissance comparée et quotient}$$

Ainsi, $tf(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$. Les fonctions $t\mapsto tf(t)$ et $t\mapsto\frac{1}{t^2}$ étant positives, et l'intégrale $\int_1^{+\infty}\frac{1}{t^2}dt$ étant convergente (critère de Riemann), par théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_1^{+\infty} tf(t)dt$ converge.
Bilan : $\int_0^{+\infty} tf(t)dt$ converge.

(b) La fonction f étant paire, la fonction $t\mapsto tf(t)$ est impaire. L'intégrale sur $[0;+\infty[$ étant convergente, celle sur $]-\infty;0]$ converge également, et $\int_{-\infty}^{0} tf(t)dt = -\int_0^{+\infty} tf(t)dt$. Ainsi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt = 0$$

L'intégrale est donc absolument convergente, et elle vaut 0.
Bilan : X admet une espérance, et $\mathbb{E}(\mathrm{X}) = 0$.

PARTIE II

5. Remarquons que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $1+e^x > 0$. Par composée, φ est donc définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$\varphi'(x) = \frac{e^x}{1+e^x} > 0$$

Ainsi, φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Par composée

$$\lim_{x\to-\infty} 1+e^x = 1 \quad\text{donc}\quad \lim_{x\to-\infty}\varphi(x) = \ln(1) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} 1+e^x = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x\to\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$$

Ainsi, la fonction φ étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème de la bijection, φ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0;+\infty[$.

6. Pour $y \in]0;+\infty[$ on a

$$\ln(1+e^x) = y \Leftrightarrow 1+e^x = e^y \Leftrightarrow e^x = e^y - 1$$

puisque $y > 0$, $e^y - 1 > 0$ et donc

$$\ln(1+e^x) = y \Leftrightarrow x = \ln(e^y - 1)$$

Ainsi, pour tout $y \in]0;+\infty[$, $\varphi^{-1}(y) = \ln(e^y - 1)$.

7. D'après la question 5, $\varphi > 0$ donc, par construction

$$\mathbb{P}(Y \leqslant 0) = \mathbb{P}(\varphi(X) \leqslant 0) = 0$$

8. D'après ce qui précède, si $x \leqslant 0$, $F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leqslant x) = 0$.
Soit $x > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \mathbb{P}(0 < Y \leqslant x) = \mathbb{P}(0 < \varphi(X) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant \varphi^{-1}(x)) = F_X(\varphi^{-1}(x)) = \frac{1}{1+e^{-\varphi^{-1}(x)}}$$

et donc

$$\mathbb{P}(Y \leqslant x) = \frac{1}{1+e^{-\ln(e^x-1)}} = \frac{1}{1+\frac{1}{e^x-1}} = \frac{e^x-1}{e^x} = 1 - e^{-x}$$

Ainsi,

$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1-e^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

9. On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre 1. Ainsi $Y \hookrightarrow \mathscr{E}(1)$, et donc $\mathbb{E}(Y) = 1$ et $\mathbb{V}\text{ar}(Y) = 1$.

PARTIE III

1.
   (a) Par définition, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T_n \leqslant x) &= \mathbb{P}(\max(X_1,\cdots,X_n) \leqslant x) \\ &\underset{\text{indépendance}}{=} \mathbb{P}(X_1 \leqslant x)\cdot\mathbb{P}(X_2 \leqslant x)\cdots\mathbb{P}(X_n \leqslant x) \\ &\underset{\text{même loi}}{=} (F_X(x))^n \end{aligned}$$

   Ainsi, pour tout réel x,

$$\mathbb{P}(T_n \leqslant x) = \left(\frac{1}{1+e^{-x}}\right)^n = \left(1+e^{-x}\right)^{-n}$$

(b) En utilisant ce qui précède, pour $n \in \mathbb{N}^*$, et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{U}_n \leqslant x) = \mathbb{P}(\mathrm{T}_n - \ln(n) \leqslant x) = \mathbb{P}\left(\mathrm{T}_n \leqslant x + \ln(n)\right)$$

et donc

$$\mathbb{P}(\mathrm{U}_n \leqslant x) = \left(1 + e^{-(x+\ln(n))}\right)^{-n} = \left(1 + e^{-x}e^{-\ln(n)}\right)^{-n} = \left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n}$$

2. On constate que, à x fixé,

$$\left(1 + \frac{e^{-x}}{n}\right)^{-n} = e^{-n\ln\left(1+\frac{e^{-x}}{n}\right)} \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-n\frac{e^{-x}}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^{-e^{-x}}$$

Notons $\mathrm{F} : x \mapsto e^{-e^{-x}}$. On constate rapidement que F est strictement croissante, de limite 0 en $-\infty$, 1 en $+\infty$, donc c'est une fonction de répartition. De plus, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Donc il s'agit de la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité, de densité

$$\forall\ x \in \mathbb{R}, g(x) = \mathrm{F}'(x) = e^{-x}e^{-e^{-x}}$$

Par définition,

$$\boxed{(\mathrm{U}_n) \text{ converge en loi vers Z,} \quad \text{de densité } g}$$