HEC

Voie E

Mercredi 27 avril 2016

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^t\mathrm{M}$ de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathscr{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathscr{B}_p$ la base canonique de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(\mathrm{MN}) = {}^t\mathrm{N}\,{}^t\mathrm{M}$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dans la base $\mathscr{B}_n$.
   On pose : $\mathrm{A} = \mathrm{X}\,{}^t\mathrm{X}$ et $\alpha = {}^t\mathrm{X}\mathrm{X}$.
   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, \cdots, x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathscr{B}_n$.
   Déterminer $\mathrm{Im}\, f$ et $\mathrm{Ker} f$; donner une base de $\mathrm{Im}\, f$ et préciser la dimension de $\mathrm{Ker} f$.
   (c) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que n et p vérifient : $1 \leqslant p \leqslant n$. Soit $(\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \cdots, \mathrm{V}_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
   On note V la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2, \cdots, \mathrm{V}_n$.
   Soit g l'application linéaire de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$.
   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker} g$.
   (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $\mathrm{VY} = 0$ si et seulement si l'on a ${}^t\mathrm{VVY} = 0$.
   (c) En déduire que la matrice ${}^t\mathrm{VV}$ est inversible.

Solution.

1. (a) Par calcul, on a

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

et

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2 \end{pmatrix}$$

On remarque que la matrice A est symétrique. Par théorème, elle est donc diagonalisable.

(b) Remarquons que, pour tout éléments $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{B}_n$, on a

$$f(e_i) = \begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & x_2x_3 & \cdots & x_2x_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & x_nx_3 & \cdots & x_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1x_i \\ x_2x_i \\ \dots \\ x_nx_i \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}(X)$. Puisque X est non nul, on en déduit que f est de rang 1, engendré par X.
D'après le théorème du rang, on a

$$\dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) = \operatorname{rg}(f) + \dim(\operatorname{Ker} f)$$

et puisque $\dim\left(\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})\right) = n$, on a

$$\dim(\operatorname{Ker} f) = n - 1$$

(c) On constate que

$$AX = X\,{}^tXX = X(\alpha) = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)X$$

Ainsi, puisque $X \neq 0$, $\alpha = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$ est une valeur propre de A, de vecteur propre Vect(X).

Bilan : Si $n > 1$, A possède deux valeurs propres : 0, d'espace propre dimension $n-1$ (question b) et α, d'espace propre de dimension 1. Sinon, A ne possède que α comme valeur propre.

2. (a) Puisque V est une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, et que $p \leqslant n$, V est de rang au plus p.
Or, ses p colonnes $V_1, \cdots, V_p$ forme une famille libre de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Donc le rang de V est au moins p.
Bilan : V est de rang p.
D'après la formule du rang,

$$\dim\left(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right) = \operatorname{rg} g + \dim(\operatorname{Ker} g)$$

Or, d'après ce qui précède, $\operatorname{rg} g = \operatorname{rg} V = p$ et $\dim\left(\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})\right) = p$. Donc,

$$\dim(\operatorname{Ker} g) = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{Ker} g = \{0\}$$

(b) $\Rightarrow$: supposons que $VY = 0$. Alors, en multipliant par ${}^tV$ à gauche, on a ${}^tVVY = 0$.
$\Leftarrow$: supposons que ${}^tVVY = 0$. Multiplions par ${}^tY$ à gauche. On a alors

$$ {}^tY\,{}^tVVY = {}^t(VY)VY = 0 $$

Or, $VY \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Notons $x_1, \cdots, x_n$ les coefficients de VY. D'après la question $1a$, ${}^t(VY)VY = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Donc si ${}^t(VY)(VY) = 0$, alors

$$ x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \cdots,\ x_n = 0 $$

et donc $VY = 0$.

(c) Supposons ${}^tVV$ non inversible. Soit $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ un vecteur propre associé à la valeur propre 0 (qui existe puisque la matrice n'est pas inversible). Ainsi ${}^tVVX = 0$. D'après la question précédente, on a $VX = 0$ et puisque $X \neq 0$, 0 est donc une valeur propre de V, ce qui est absurde, puisque g a un noyau réduit à $\{0\}$.
Bilan : la matrice ${}^tVV$ est inversible.

PROBLEME

On s'intéresse dans ce problème à quelques aspects mathématiques de la fonction de production d'une entreprise qui produit un certain bien à une époque donnée, à partir des deux facteurs de production travail et capital.

Dans tout le problème :

- *On note respectivement x et y les quantités de travail et de capital requises pour produire une certaine quantité de ce bien.*
- *On suppose que $x > 0$ et $y > 0$. On pose :* $\mathscr{D} = (\mathbb{R}_+^*)^2$ *et pour tout* $(x, y) \in \mathscr{D}$, $z = \frac{x}{y}$.

La partie III est indépendante des parties I et II.

Partie I. Fonction de production CES (Constant Elasticity of Substitution).

Dans toute cette partie, on note c un réel vérifiant $0 < c < 1$ et θ un réel vérifiant $\theta < 1$ avec $\theta \neq 0$.
Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, telle que :

$$\forall\ (x, y) \in \mathscr{D}, \quad f(x, y) = \left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}} \quad (\textit{fonction de production CES}).$$

1. *Exemple*. Dans cette question **uniquement**, on prend $\theta = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, on a : $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x+y}$. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et calculer pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, les dérivées partielles $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.
   (b) Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\ t > 0$, $w(t) = \frac{2t}{1+t}$ et $\mathrm{U}(t) = w(t) - tw'(t)$.
   Dresser le tableau de variation de la fonction U sur $\mathbb{R}_+^*$ et étudier la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
   (c) On rappelle que $z = \frac{x}{y}$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, on a : $f(x, y) = yw(z)$.
   (d) Vérifier pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, les relations : $\partial_1(f)(x, y) = w'(z)$ et $\partial_2(f)(x, y) = \mathrm{U}(z)$.
2. (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$ et pour tout réel $\lambda > 0$, on a : $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x, y)$.
   (b) Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ et, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, calculer $\partial_1(f)(x, y)$ et $\partial_2(f)(x, y)$.
   (c) Déterminer pour tout $y > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x, y)$.
   De même, déterminer pour tout $x > 0$ fixé, le signe et la monotonie de la fonction $y \mapsto \partial_2(f)(x, y)$.
3. Soit G la fonction définie sur $\mathscr{D}$ par $\mathrm{G}(x, y) = \dfrac{\partial_1(f)(x, y)}{\partial_2(f)(x, y)}$ (*taux marginal de substitution technique*) et g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\ t > 0$, $g(t) = \frac{c}{1-c} t^{-1+\theta}$.
   (a) Pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, exprimer $\mathrm{G}(x, y)$ en fonction de $g(z)$.
   (b) Pour tout $t > 0$, on pose : $s(t) = -\frac{g(t)}{tg'(t)}$. Calculer $s(z)$ (*élasticité de substitution*). Conclusion.
4. Soit w et U les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\ t > 0$, $w(t) = f(t, 1)$ et $\mathrm{U}(t) = w(t) - tw'(t)$.
   (a) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$, on a : $f(x, y) = yw(z)$.
   (b) En distinguant les deux cas $0 < \theta < 1$ et $\theta < 0$, dresser le tableau de variation de U sur $\mathbb{R}_+^*$.
   Préciser $\lim\limits_{t \to 0^+} \mathrm{U}(t)$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{U}(t)$ ainsi que la convexité de U sur $\mathbb{R}_+^*$.

Partie II. Caractérisation des fonctions de production à élasticité de substitution constante.

Dans toute cette partie, on note Ψ une fonction définie et de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, vérifiant la condition $\Psi(1, 1) = 1$ et pour tout réel $\lambda > 0$, la relation : $\Psi(\lambda x, \lambda y) = \lambda \Psi(x, y)$.
De plus, on suppose que pour tout $y > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \partial_1(\Psi)(x, y)$ est strictement positive et strictement décroissante et que pour tout $x > 0$ fixé, la fonction $y \mapsto \partial_2(\Psi)(x, y)$ est également strictement positive et strictement décroissante.

5. Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\ t>0,\ v(t)=\Psi(t,1)$.
   (a) Justifie que la fonction v est de classe $\mathscr{C}^2$, strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$
   (b) Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $\forall\ t>0,\ \varphi(t)=v(t)-tv'(t)$. On suppose l'existence de la limite de $\varphi(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs supérieures et que $\lim\limits_{t\to 0^+}\varphi(t)=\mu$ avec $\mu\geqslant 0$.
   Déterminer pour tout $t>0$, le signe de $\varphi(t)$ et montrer que $\mu<1$.
   (c) Montrer que : $\forall\ (x,y)\in\mathscr{D},\ \Psi(x,y)=yv(z)$.
6. (a) Pour tout $t>0$, on pose : $h(t)=\frac{v'(t)}{\varphi(t)}$. Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathscr{D}$, on a : $\dfrac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)}=h(z)$.
   (b) Pour tout $t>0$, on pose $\sigma(t)=-\frac{h(t)}{th'(t)}$. Déterminer pour tout $t>0$, le signe de $\sigma(t)$.
7. Les fonctions σ et h sont celles qui ont été définies dans la question 6. On suppose que la fonction σ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$; on note σ_0 cette constante et on suppose que $\sigma_0\neq 1$. On pose : $r=1-\frac{1}{\sigma_0}$.
   (a) Pour tout $t>0$, on pose $l(t)=t^{1-r}h(t)$. Calculer $l'(t)$ et en déduire que : $\forall\ t>0,\ h(t)=h(1)t^{r-1}$.
   (b) Par une méthode analogue à celle de la question 7.a), établir la relation : $\forall\ t>0,\ v(t)=\left(\dfrac{1+h(1)t^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$.
   (c) En déduire l'existence d'une constante $a\in]0,1[$ telle que : $\forall\ (x,y)\in\mathscr{D},\ \Psi(x,y)=\left(ax^r+(1-a)y^r\right)^{\frac{1}{r}}$.
   (d) Quelle conclusion peut-on tirer des résultats des questions 3.b) et 7.c) ?
8. Soit $a\in]0,1[$. Pour tout $t>0$, soit S_t la fonction définie sur $]-\infty,1[\setminus\{0\}$ par : $\mathrm{S}_t(r)=(at^r+(1-a))^{\frac{1}{r}}$.
   (a) On pose : $\mathrm{H}_t(r)=\ln \mathrm{S}_t(r)$. Calculer la limite de $\mathrm{S}_t(r)$ lors r tend vers 0.
   (b) Pour tout couple $(x,y)\in\mathscr{D}$ fixé, on pose : $\mathrm{N}_{(x,y)}(r)=y\mathrm{S}_z(r)$ et $\mathrm{F}(x,y)=\lim\limits_{r\to 0}\mathrm{N}_{(x,y)}(r)$.
   Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathscr{D}$, on a : $\mathrm{F}(x,y)=x^a y^{1-a}$ (*fonction de production de Cobb-Douglas*).

Partie III. Estimation des paramètres d'une fonction de production de Cobb-Douglas

Soit a un réel vérifiant $0<a<1$ et B un réel strictement positif.
On suppose que la production totale Q présente une composante déterministe et une composante aléatoire.

- La *composante déterministe* est une fonction de production f de type Cobb-Douglas, c'est-à-dire telle que :

$$\forall\ (x,y)\in\mathscr{D},\quad f(x,y)=\mathrm{B}x^a y^{1-a}$$

- La *composante aléatoire* est une variable aléatoire de la forme exp(R) où R est une variable aléatoire suivant la loi normale centrée, de variance $\sigma^2>0$.
- La *production totale* Q est une variable aléatoire à valeurs strictement positives telle que :

$$\mathrm{Q}=\mathrm{B}x^a y^{1-a}\exp(\mathrm{R})$$

On suppose que les variables aléatoires Q et R sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},\mathbb{P})$.
On pose : $b=\ln\mathrm{B}$, $u=\ln x-\ln y$ et $\mathrm{T}=\ln\mathrm{Q}-\ln y$. On a donc : $\mathrm{T}=au+b+\mathrm{R}$.
On sélectionne n entreprises ($n\geqslant 1$) qui produisent le bien considéré à l'époque donnée.
On mesure pour chaque entreprise i ($i\in[\![1,n]\!]$) la quantité de travail x_i et la quantité de capital y_i utilisées ainsi que la quantité produite Q_i^*. On suppose que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, on a $x_i>0$, $y_i>0$ et $\mathrm{Q}_i^*>0$.
Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la production totale de l'entreprise i est alors une variable aléatoire Q_i telle que $\mathrm{Q}_i=\mathrm{B}x_i^a y_i^{1-a}\exp(\mathrm{R}_i)$, où $\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2,\cdots,\mathrm{R}_n$ sont des variables aléatoires supposées indépendantes et de même loi que R et le réel strictement positif Q_i^* est une réalisation de la variable aléatoire Q_i.
On pose pour tout $i\in[\![1,n]\!]$: $u_i=\ln x_i-\ln y_i$, $\mathrm{T}_i=\ln\mathrm{Q}_i-\ln y_i$ et $t_i=\ln\mathrm{Q}_i^*-\ln y_i$.
Ainsi, pour chaque entreprise $i\in[\![1,n]\!]$, on a : $\mathrm{T}_i=au_i+b+\mathrm{R}_i$ et le réel t_i est une réalisation de la variable aléatoire T_i.

On rappelle les définitions et résultats suivants :

- Si $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est une série statistique, la moyenne et la variance empiriques, notées respectivement $\overline{v}$ et s_v^2, sont données par : $\overline{v}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i$ et $s_v^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})^2=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i^2-\overline{v}^2$..
- Si $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux séries statistiques, la covariance empirique de la série double $(v_i,w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, notée $\mathrm{Cov}(v,w)$, est donnée par : $\mathrm{Cov}(v,w)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})(w_i-\overline{w})=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} v_i w_i-\overline{v}\,\overline{w}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(v_i-\overline{v})w_i$.

9. (a) Montrer que pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, la variable aléatoire T_i suit la loi normale $\mathcal{N}(au_i+b,\sigma^2)$.

   (b) Les variables aléatoires $\mathrm{T}_1,\mathrm{T}_2,\cdots,\mathrm{T}_n$ sont-elles indépendantes ?

Pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, soit φ_i la densité continue sur $\mathbb{R}$ de T_i : $\forall\ d\in\mathbb{R},\ \varphi_i(d)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(d-(au_i+b))^2\right)$.

Soit $\mathscr{F}$ l'ouvert défini par $\mathscr{F}=]0,1[\times\mathbb{R}$ et M la fonction de $\mathscr{F}$ définie par : $\mathrm{M}(a,b)=\ln\left(\displaystyle\prod_{i=1}^{n}\varphi_i(t_i)\right)$.

On suppose que : $0<\mathrm{Cov}(u,t)<s_u^2$.

10. (a) Calculer le gradient $\nabla(\mathrm{M})(a,b)$ de M en tout point $(a,b)\in\mathscr{F}$.

    (b) En déduire que M admet sur $\mathscr{F}$ un unique point critique, noté $(\hat{a},\hat{b})$.

    (c) Exprmier $\hat{a}$ et $\hat{b}$ en fonction de $\mathrm{Cov}(u,t)$, s_u^2, $\overline{t}$ et $\overline{u}$.
    (*$\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont les estimations de a et b par la méthode dite du maximum de vraisemblance*).

11. (a) Soit $\nabla^2(\mathrm{M})(a,b)$ la matrice hessienne de M en $(a,b)\in\mathscr{F}$. Montrer que : $\nabla^2(\mathrm{M})(a,b)=-\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix} s_u^2+\overline{u}^2 & \overline{u}\\ \overline{u} & 1\end{pmatrix}$.

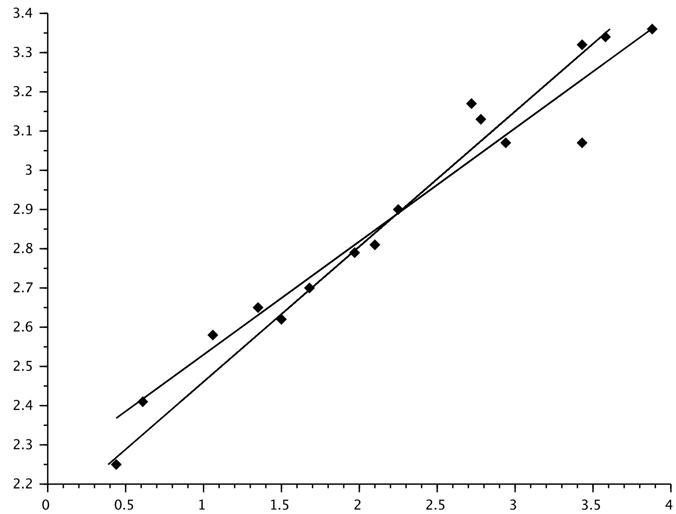
    (b) En déduire que M admet au point $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum local.

12. Soit (h,k) un couple de réels non nuls. Calculer $\mathrm{M}(\hat{a}+h,\hat{b}+k)-\mathrm{M}(\hat{a},\hat{b})$.
    En déduire que M admet en $(\hat{a},\hat{b})$ un maximum global.

13. On rappelle qu'en *Scilab*, les commandes `variance` et `corr` permettent de calculer respectivement la variance d'une série statistique et la covariance d'une série statistique double.
    Si $v=(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $w=(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont deux séries statistiques, alors la variance de $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est calculable par `variance(v)` et la covariance de $(v_i,w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est calculable par `carr(v,w,1)`.
    On a relevé pour $n=16$ entreprises qui produisent le bien considéré à l'époque donnée, les deux séries statistiques $(u_i)_{1\leqslant i\leqslant 16}$ et $(t_i)_{1\leqslant i\leqslant 16}$ reproduites dans les lignes (1) et (2) du code *Scilab* suivant dont la ligne (5) est incomplète :

```
(1)    u=[1.06,0.44,2.25,3.88,0.61,1.97,3.43,2.10,1.50,1.68,2.72,1.35,2.94,2.78,3.43,3.58]
(2)    t=[2.58,2.25,2.90,3.36,2.41,2.79,3.32,2.81,2.62,2.70,3.17,2.65,3.07,3.13,3.07,3.34]
(3)    plot2d(u,t,-4) // -4 signifie que les points sont représentée par des losanges
(4)    plot2d(u,corr(u,t,1)/variance(u)*u+mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u))
                                        // équation de la droite de régression de t en u.
(5)    plot2d(u,......................) // équation de la droite de régression de u en t.
```

Le code précédent complété par la ligne (5) donne alors la figure suivante :



(a) Compléter la ligne (5) du code permettant d'obtenir la figure précédente (*on reportera sur sa copie, uniquement la ligne* (5) *complétée*).

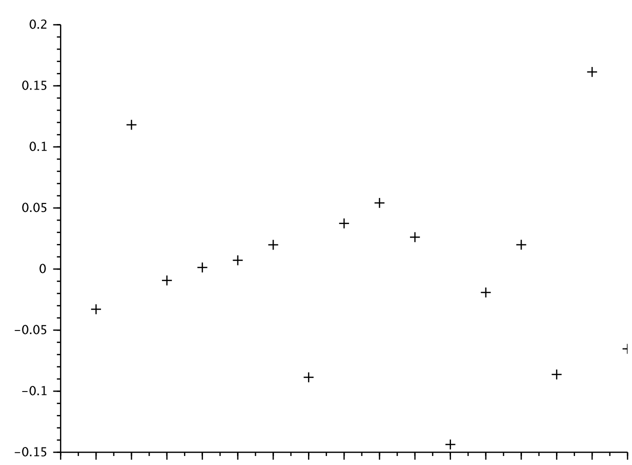
(b) Interpréter le point d'intersection des deux droites de régression.

(c) Estimer graphiquement les moyennes empiriques $\overline{u}$ et $\overline{t}$.

(d) Le coefficient de corrélation empirique de la série statistique double $(u_i, t_i)_{1 \leqslant i \leqslant 16}$ est-il plus proche de -1, de 1 ou de 0 ?

(e) On reprend les lignes (1) et (2) du code précédent que l'on complète par les instructions (6) à (11) qui suivent et on obtient le graphique ci-dessous :

```
(6)   a0=corr(u,t,1)/variance(u)
(7)   b0=mean(t)-corr(u,t,1)/variance(u)*mean(u)
(8)   t0=a0*u+b0
(9)   e=t0-t
(10)  p=1 :16
(11)  plot2d(p,e,-1) // -1 signifie que les points sont représentés par +.
```



Que représente ce graphique ? Quelle valeur peut-on conjecturer pour la moyenne des ordonnées des 16 points obtenus sur le graphique ? Déterminer mathématiquement la valeur de cette moyenne.

14. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $\mathrm{A}_n = \dfrac{1}{n s_u^2} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (u_i - \overline{u}) \mathrm{T}_i$. On suppose que le paramètre σ^2 est connu.

   (a) Calculer l'espérance $\mathrm{E}(\mathrm{A}_n)$ et la variance $\mathrm{V}(\mathrm{A}_n)$ de la variable aléatoire A_n. Préciser la loi de A_n.

   (b) On suppose que a est un paramètre inconnu. Soit α un réel donné vérifiant $0 < \alpha < 1$.
   On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_α le réel tel que $\Phi(d_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.
   Déterminer un intervalle de confiance du paramètre a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

Solution.

Partie I

1. (a) Pour $(x, y) \in \mathscr{D}$, on a

$$f(x, y) = \left(\frac{1}{2} x^{-1} + \left(1 - \frac{1}{2}\right) y^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2y}\right)^{-1} = \left(\frac{y + x}{2xy}\right)^{-1} = \frac{2xy}{x + y}$$

Les fonctions $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ (car polynomiales). Par produit et somme, $(x, y) \mapsto 2xy$ et $(x, y) \mapsto x + y$ le sont également, et puisque $x + y \neq 0$ sur $\mathscr{D}$, par quotient, f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$.
On a alors, pour $(x, y) \in \mathscr{D}$:

$$\partial_1(f)(x, y) = \frac{2y(x + y) - 2xy}{(x + y)^2} = \frac{2y^2}{(x + y)^2} \quad \text{et} \quad \partial_2(f)(x, y) = \frac{2x(x + y) - 2xy}{(x + y)^2} = \frac{2x^2}{(x + y)^2}$$

(b) Remarquons que la fonction w est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$ comme quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas (car $1 + t > 0$). Ainsi, U est également de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a alors

$$\forall\ t > 0, \quad \mathrm{U}'(t) = w'(t) - (w'(t) + t w''(t)) = -t w''(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{U}''(t) = -w''(t) - t w^{(3)}(t)$$

Or, on constate que, pour $t > 0$:

$$w'(t) = \frac{2(1 + t) - 2t}{(1 + t)^2} = \frac{2}{(1 + t)^2}, \quad w''(t) = -\frac{4}{(1 + t)^3} \quad \text{et} \quad w^{(3)}(t) = \frac{12}{(1 + t)^4}$$

Donc, pour $t > 0$:

$$\boxed{\mathrm{U}'(t) = \frac{4t}{(1 + t)^3} \quad \text{et} \quad \mathrm{U}''(t) = \frac{4(1 + t) - 12t}{(1 + t)^4} = \frac{4 - 8t}{(1 + t)^4}}$$

On dispose alors du tableau de signe de U″ suivant :

t	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$\mathrm{U}''(t)$	$\|$	$+$	0	$-$	

U est donc convexe sur $\left]0;\frac{1}{2}\right]$, concave sur $\left[\frac{1}{2};+\infty\right[$ et la courbe représentative de U admet un point d'inflexion au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.
On dispose également du tableau de variation suivant :

t	0		$+\infty$
$\mathrm{U}'(t)$	$\Vert$	$+$	0
$\mathrm{U}(t)$	0	$\nearrow$	

(c) Soit $(x,y)\in\mathscr{D}$. Alors

$$yw(z)=y\frac{2\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}=\frac{2x}{y+x}=\frac{2xy}{x+y}=f(x,y)$$

(d) De même, en utilisant les résultats précédents :

$$w'(z)=\frac{2}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{2y^2}{(x+y)^2}=\partial_1(f)(x,y)$$

et

$$\mathrm{U}(z)=\frac{2\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}-\frac{x}{y}\frac{2}{\left(1+\frac{x}{y}\right)^2}=\frac{2x}{x+y}-\frac{x}{y}\frac{2y^2}{(x+y)^2}=\frac{2x(x+y)}{(x+y)^2}-\frac{2xy}{(x+y)^2}=\frac{2x^2}{(x+y)^2}=\partial_2(f)(x,y)$$

2. (a) Soit $\lambda>0$ un réel, et $(x,y)\in\mathscr{D}$. Alors

$$f(\lambda x,\lambda y)=\left(c(\lambda x)^\theta+(1-c)(\lambda y)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}=\left(\lambda^\theta(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}=(\lambda^\theta)^{\frac{1}{\theta}}\left(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}=\lambda f(x,y)$$

(b) Les fonctions $t\mapsto t^\theta$ et $t\mapsto t^{\frac{1}{\theta}}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Les fonction $(x,y)\mapsto x$ et $(x,y)\mapsto y$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$ (car polynomiales). De plus, pour tout $(x,y)\in\mathscr{D}$, $cx^\theta+(1-c)y^\theta>0$ (car c, x et y sont strictement positifs). Par somme et composée, la fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{D}$.
On a alors,

$$\partial_1(f)(x,y)=\frac{1}{\theta}\left(c\theta x^{\theta-1}\right)\left(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}=cx^{\theta-1}\left(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

et

$$\partial_2(f)(x,y)=\frac{1}{\theta}\left((1-c)\theta y^{\theta-1}\right)\left(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}=(1-c)y^{\theta-1}\left(cx^\theta+(1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

(c) Remarquons tout d'abord que, pour $(x,y)\in\mathscr{D}$, $x^{\theta-1}>0$, $y^{\theta-1}>0$, et $cx^\theta+(1-c)y^\theta>0$. Ainsi, on obtient d'ores et déjà que

$$\boxed{\forall\ (x,y)\in\mathscr{D},\quad \partial_1(f)(x,y)>0\quad\text{et}\quad\partial_2(f)(x,y)>0}$$

Notons que, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$:

$$\partial_1(f)(x,y) = c\frac{1}{x^{1-\theta}}\left(\left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta} = c\left(\frac{\left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}}{x}\right)^{1-\theta}$$

et donc

$$\partial_1(f)(x,y) = \left(\left(\frac{cx^\theta + (1-c)y^\theta}{x^\theta}\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)^{1-\theta} = \left(c + (1-c)\left(\frac{y}{x}\right)^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

La fonction $x \mapsto \frac{y}{x}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, les fonctions $x \mapsto x^a$ sont strictement croissantes sur $a > 0$, décroissante si $a < 0$.

— Ainsi, si $\theta > 0$, $\frac{1}{\theta} - 1 > 0$ et par somme et composée, la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

— Si $\theta < 0$, $\frac{1}{\theta} - 1 < 0$ et par somme et composée, la fonction $x \mapsto \partial_1(f)(x,y)$ est également strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par symétrie du problème, on a, au final :

$$\boxed{x \mapsto \partial_1(f)(x,y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \partial_2(f)(x,y) \text{ sont strictement décroissantes sur } \mathbb{R}_+^*}$$

3. (a) Soit $(x, y) \in \mathscr{D}$. D'après les calculs précédents, on constate que

$$G(x,y) = \frac{cx^{\theta-1}\left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}}{(1-c)y^{\theta-1}\left(cx^\theta + (1-c)y^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}-1}} = \frac{cx^{\theta-1}}{(1-c)y^{\theta-1}} = \frac{c}{1-c}\left(\frac{x}{y}\right)^{\theta-1} = g(z)$$

(b) Remarquons que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ (fonction puissance). On a alors, pour $t > 0$

$$g'(t) = \frac{c}{1-c}(-1+\theta)t^{-2+\theta}$$

et donc

$$s(t) = -\frac{\frac{c}{1-c}t^{-1+\theta}}{t\frac{c}{1-c}(-1+\theta)t^{-2+\theta}} = \frac{1}{1-\theta}$$

On constate que dans ce cas, l'élasticité de substitution ne dépend pas de z, et est constante égale à $\frac{1}{1-\theta}$.

4. (a) Soit $(x, y) \in \mathscr{D}$. D'après la question $2a$, pour tout $\lambda > 0$, on a $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$. Prenons alors $\lambda = \frac{1}{y} > 0$. On obtient

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda f(x,y)$$

soit

$$f(\frac{x}{y}, 1) = \frac{1}{y}f(x,y)$$

et donc

$$f(z,1) = w(z) = \frac{1}{y}f(x,y)$$

Ce qui nous donne donc $f(x,y) = yw(z)$.

(b) En utilisant les résultats précédents, on a, pour $t > 0$

$$w'(t) = ct^{\theta-1}\left(ct^{\theta} + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

et donc

$$\mathrm{U}(t) = \left(ct^{\theta} + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}} - tct^{\theta-1}\left(ct^{\theta} + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

soit

$$\mathrm{U}(t) = \left(ct^{\theta} + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1}\left[ct^{\theta} + (1-c) - ct^{\theta}\right]$$

et donc

$$\boxed{\forall\ t > 0, \quad \mathrm{U}(t) = (1-c)\left(ct^{\theta} + (1-c)\right)^{\frac{1}{\theta}-1}}$$

- Premier cas : $0 < \theta < 1$. Ainsi, $\frac{1}{\theta} - 1 > 0$. La fonction $t \mapsto t^{\theta}$ est strictement croissante, et même que $t \mapsto t^{\frac{1}{\theta}-1}$. Par somme et composée de fonctions strictement croissantes, $\boxed{\text{U est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$. De plus, puisque $\theta > 0$,

$$\lim_{t\to 0^+} t^{\theta} = \lim_{t\to 0^+} e^{\theta \ln(t)} = 0$$

et par somme et composée

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} \mathrm{U}(t) = (1-c)(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1} = (1-c)^{\frac{1}{\theta}}}$$

De même, puisque $\theta > 0$ et $\frac{1}{\theta} - 1 > 0$:

$$\lim_{t\to+\infty} ct^{\theta} + (1-c) = +\infty \quad \text{et donc} \quad \lim_{t\to+\infty} \mathrm{U}(t) = +\infty$$

On peut regrouper ces résultats sur le tableau suivant :

t	0		$+\infty$
$\mathrm{U}'(t)$		$+$	
$\mathrm{U}(t)$	$\Vert$ $(1-c)^{\frac{1}{\theta}}$	↗	$+\infty$

- Deuxième cas : $\theta < 0$ et donc $\frac{1}{\theta} - 1 < 0$. Dans ce cas, $t \mapsto t^{\theta}$ est strictement décroissante, de même que $t \mapsto t^{\frac{1}{\theta}-1}$. Ainsi, par composée de deux fonctions strictement décroissantes, $\boxed{\text{U est strictement croissante sur } \mathbb{R}_+^*}$.
Pour les limites, en utilisant $\theta < 0$ et $\frac{1}{\theta} - 1 < 0$:

$$\lim_{t\to 0^+} ct^{\theta} + (1-c) = \lim_{t\to 0^+} ce^{\theta \ln(t)} + (1-c) = +\infty$$

donc par composée

$$\lim_{t\to 0^+} \mathrm{U}(t) = \lim_{\mathrm{T}\to+\infty} \mathrm{T}^{\frac{1}{\theta}-1} = 0$$

De même :

$$\lim_{t\to+\infty} ct^{\theta}+(1-c)=\lim_{t\to+\infty} ce^{\theta\ln(t)}+(1-c)=(1-c)$$

et par composée

$$\lim_{t\to+\infty} \mathrm{U}(t)=(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1}$$

On peut regrouper ces résultats sur le tableau suivant :

t	0		$+\infty$
$\mathrm{U}'(t)$		$+$	
$\mathrm{U}(t)$	$\Vert\ 0$	$\nearrow$	$(1-c)^{\frac{1}{\theta}-1}$

Partie II

5. (a) La fonction $t\mapsto(t,1)$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et Ψ l'étant sur $\mathscr{D}$, par composée, v est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t>0$:

$$v'(t)=\partial_1(\Psi)(t,1)$$

Par hypothèse, $x\mapsto\partial_1(\Psi)(x,1)$ est strictement positive, donc v est strictement croissante.
De plus, $x\mapsto\partial_1(\Psi)(x,1)$ est strictement décroissante, donc v' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$: v est donc concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

(b) D'après la question précédente, et par produit, φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour tout $t>0$:

$$\varphi'(t)=v'(t)-(v'(t)+tv''(t))=-tv''(t)$$

Puisque v est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, pour tout $t>0$, $v''(t)<0$. Par produit, $\forall\ t>0,\ \varphi'(t)>0$.
De plus,

$$\varphi(1)=v(1)-v'(1)=\Psi(1,1)-\underbrace{v'(1)}_{>0}<\Psi(1,1)=1$$

On obtient le tableau de variation suivant :

t	0		1		$+\infty$
$\varphi'(t)$		$+$		$+$	
$\varphi(t)$	$\Vert\ \mu$	$\nearrow$	$1-v'(1)$	$\nearrow$	

Et donc, pour tout $t>0$, $\varphi(t)>0$ et $\mu<1$.

(c) Soit $(x,y)\in\mathscr{D}$. On utilise la relation $\Psi(\lambda x,\lambda y)=\lambda\Psi(x,y)$ avec $\lambda=\frac{1}{y}$ $(y\neq0)$. Ainsi

$$\Psi\left(\frac{1}{y}x,\frac{1}{y}y\right)=\frac{1}{y}\Psi(x,y)$$

soit

$$\Psi(z,1) = \frac{1}{y}\Psi(x,y)$$

et donc $\Psi(x,y) = y\Psi(z,1) = yv(z)$, relation vraie pour tout $(x,y) \in \mathscr{D}$.

6. (a) Soit $(x,y) \in \mathscr{D}$. D'après la question précédente, on a $\Psi(x,y) = yv\left(\frac{x}{y}\right)$. En dérivant, on obtient donc :

$$\partial_1(\Psi)(x,y) = y \times \frac{1}{y}v'(z) \quad \text{et} \quad \partial_2(\Psi)(x,y) = v(z) + y\frac{-x}{y^2}v'(z)$$

soit

$$\partial_1(\Psi)(x,y) = v'(z) \quad \text{et} \quad \partial_2(\Psi)(x,y) = v(z) - \frac{x}{y}v'(z) = v(z) - zv'(z)$$

et donc

$$\frac{\partial_1(\Psi)(x,y)}{\partial_2(\Psi)(x,y)} = \frac{v'(z)}{v(z) - zv'(z)} = \frac{v'(z)}{\varphi(z)} = h(z)$$

(b) Puisque $\varphi > 0$ et est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, et que v' est de classe $\mathscr{C}^1$ (car v est $\mathscr{C}^2$) sur $\mathbb{R}_+^*$, par quotient, h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout $t > 0$, on alors

$$h'(t) = \frac{v''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2}$$

soit,

$$\sigma(t) = -\frac{\frac{v'(t)}{\varphi(t)}}{t\frac{v''(t)\varphi(t)-v'(t)\varphi'(t)}{(\varphi(t))^2}} = -\frac{v'(t)\varphi(t)}{tv''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t)}$$

D'après les résultats précédents, $v'(t) > 0$ et $\varphi(t) > 0$ donc $v'(t)\varphi(t) > 0$. De même, $v''(t) < 0$ (v concave), $\varphi(t) > 0$ et $\varphi'(t) > 0$. Par produit et somme, $tv''(t)\varphi(t) - v'(t)\varphi'(t) < 0$.
Bilan : pour tout $t > 0$, $\sigma(t) > 0$.

7. (a) Par produit, l est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. On a, pour tout $t > 0$

$$l'(t) = (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r}h'(t)$$

Or, pour $t > 0$, $\sigma_0 = -\dfrac{h(t)}{th'(t)}$, c'est-à-dire $h'(t) = -\frac{h(t)}{t\sigma_0}$. Donc, pour $t > 0$:

$$l'(t) = (1-r)t^{-r}h(t) + t^{1-r} \times \left(-\frac{h(t)}{t\sigma_0}\right) = (1-r)t^{-r}h(t) - \frac{1}{\sigma_0}t^{-r}h(t) = 0$$

en utilisant $1 - r = \frac{1}{\sigma_0}$. l' étant nulle sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$, l est constante sur $\mathbb{R}_+^*$, valant $l(1) = h(1)$.
Ainsi :

$$\forall\ t > 0,\ l(t) = h(1) \Leftrightarrow \forall\ t > 0,\ h(t) = h(1)t^{r-1}$$

(b) La relation implique que $t \mapsto v(t)\,(1 + th(t))^{-\frac{1}{r}}$ est constante. Pour tout $t > 0$, on pose

$$m(t) = v(t)\,(1 + th(t))^{-\frac{1}{r}}.$$

Par produit et somme, m est de classe $\mathscr{C}^1$ sur R_+^*. Pour tout $t > 0$:

$$m'(t) = v'(t)\,(1 + th(t))^{-\frac{1}{r}} + v(t) \times \left(-\frac{1}{r}(h(t) + th'(t))\,(1 + th(t))^{-\frac{1}{r}-1}\right)$$

soit, après factorisation

$$m'(t) = (1+th(t))^{-\frac{1}{r}-1}\left(v'(t)(1+th(t)) - \frac{1}{r}(h(t)+th'(t))v(t)\right)$$

Or, $\sigma_0 = -\frac{h(t)}{th'(t)}$ donc $th'(t)+h(t) = -\frac{1}{\sigma_0}h(t)+h(t) = h(t)\left(1-\frac{1}{\sigma_0}\right) = rh(t)$. D'où

$$m'(t) = (1+th(t))^{-\frac{1}{r}-1}\left(v'(t)(1+th(t)) - h(t)v(t)\right)$$

soit encore

$$m'(t) = (1+th(t))^{-\frac{1}{r}-1}\left(h(t)(tv'(t)-v(t)) + v'(t)\right)$$

On reconnait $tv'(t)-v(t) = -\varphi(t)$ et donc $h(t)(tv'(t)-v(t)) = -h(t)\varphi(t) = -v'(t)$. Et finalement

$$m'(t) = (1+th(t))^{-\frac{1}{r}-1}\left(-v'(t)+v'(t)\right) = 0$$

Ainsi, $\mathbb{R}_+^*$ étant un intervalle, m est constante sur $\mathbb{R}_+^*$. Or,

$$m(1) = v(1)(1+h(1))^{-\frac{1}{r}} = (1+h(1)^{-\frac{1}{r}}$$

et finalement

$$\forall\ t>0,\ m(t) = m(1) \Leftrightarrow v(t)\,(1+th(t))^{-\frac{1}{r}} = (1+h(1)^{-\frac{1}{r}}$$

et donc

$$\boxed{\forall\ t>0,\quad v(t) = \left(\frac{1+th(t)}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}}$$

(c) On a vu dans la question 5.c) que pour tout $(x,y)\in\mathscr{D}$, on a $\Psi(x,y) = yv(z)$. Donc, en utilisant l'écriture de v précédente :

$$\Psi(x,y) = y\left(\frac{1+h(1)z^r}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} = y\left(\frac{1+h(1)\frac{x^r}{y^r}}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}} = \left(y^r\frac{1+h(1)\frac{x^r}{y^r}}{1+h(1)}\right)^{\frac{1}{r}}$$

Posons $a = \frac{h(1)}{1+h(1)}$. On a alors $1-a = \frac{1}{1+h(1)}$, et pour tout $(x,y)\in\mathscr{D}$:

$$\Psi(x,y) = \left(ax^r+(1-a)y^r\right)^{\frac{1}{r}}$$

(d) Les questions 3.b) et 7.c) permettent de conclure que les seules fonctions à élasticité de substitution constantes sont les fonctions de production CES. (d'où le nom CES : “constant elasticity of substitution”).

8. (a) Fixons $t>0$. Pour tout $r>0$, on a

$$\mathrm{H}_t(r) = \ln \mathrm{S}_t(r) = \frac{1}{r}\ln\left(at^r+(1-a)\right) = \frac{\ln(1+a(t^r-1))}{r}$$

Constatons que, lorsque r tend vers 0, t^r tend vers 1. Donc $a(t^r-1)\underset{r\to 0}{\longrightarrow}0$. Ainsi

$$\mathrm{H}_t(r)\underset{r\to 0}{\sim} a\frac{t^r-1}{r}$$

Or, la fonction $r \mapsto t^r = e^{r\ln(t)}$ est dérivable en 0, de dérivée $\ln(t)$. Donc

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{t^r - 1}{r} = \ln(t)$$

et donc, par produit

$$\lim_{r\to 0^+} \mathrm{H}_t(r) = a\ln(t)$$

et donc

$$\lim_{r\to 0^+} \mathrm{S}_t(r) = e^{a\ln(t)} = t^a$$

(b) En utilisant la question précédente, on a

$$\lim_{r\to 0^+} \mathrm{S}_z(r) = z^a = \frac{x^a}{y^a}$$

Ainsi, par produit, pour tout $(x, y) \in \mathscr{D}$:

$$\boxed{\mathrm{F}(x, y) = y\frac{x^a}{y^a} = x^a y^{1-a}}$$

Partie III

9. (a) On rappelle que si X suit une loi $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $a\mathrm{X} + b$ suit la loi $\mathscr{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Ici, $\mathrm{R}_i \hookrightarrow \mathscr{N}(0, \sigma^2)$, donc $au_i + b + \mathrm{R}_i \hookrightarrow \mathscr{N}(au_i + b, \sigma^2)$.

   (b) Les variables aléatoires R_i étant indépendantes (énoncé), les variables $au_i + b + \mathrm{R}_i$ sont donc également indépendantes.

10. **Les résultats suivants sont classiques, pour déterminer le maximum de vraissemblance.**

   (a) Par définition, $\varphi(t_i) > 0$ donc la fonction $\mathrm{M}(a, b)$ est bien définie sur $\mathscr{F}$.
   On a alors, pour tout $(a, b) \in \mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(a,b) &= \sum_{i=1}^{n} \ln(\varphi_i(ti)) \\
&= -n\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) + \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2\sigma^2}(t_i - au_i - b)^2 \\
&= -n\ln\left(\sigma\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(t_i - au_i - b)^2
\end{aligned}$$

   La fonction M est polynomiale, et donc de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{F}$. On obtient alors, pour tout $(a, b) \in \mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}
\partial_1(\mathrm{M})(a,b) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} 2(-u_i)(t_i - au_i - b) \\
&= 2\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} u_i t_i - a\sum_{i=1}^{n} u_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} u_i\right)
\end{aligned}$$

En utilisant les définitions de $\overline{u}, \overline{t}$ et $\text{Cov}(u,t)$:

$$\begin{aligned}\partial_1(\text{M})(a,b) &= \frac{1}{\sigma^2}\left(n\text{Cov}(u,t)+\overline{u}\,\overline{t}-a(ns_u^2+n\overline{u}^2)-bn\overline{u}\right)\\ &= \frac{n}{\sigma^2}\left(\text{Cov}(u,t)+\overline{u}\,\overline{t}-a(s_u^2+\overline{u}^2)-b\overline{u}\right)\end{aligned}$$

De même, pour $(a,b)\in\mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}\partial_2(\text{M})(a,b) &= -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}-2(t_i-au_i-b)\\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n}t_i-a\sum_{i=1}^{n}u_i-bn\right)\end{aligned}$$

et en utilisant les mêmes définitions :

$$\begin{aligned}\partial_2(\text{M})(a,b) &= \frac{1}{\sigma^2}\left(n\overline{t}-an\overline{u}-nb\right)\\ &= \frac{n}{\sigma^2}\left(\overline{t}-a\overline{u}-b\right)\end{aligned}$$

(b) $(a,b)\in\mathscr{F}$ est un point critique de M si et seulement si $\partial_1(\text{M})(a,b)=0$ et $\partial_2(\text{M})(a,b)=0$, soit

$$\text{Cov}(u,t)+\overline{u}\,\overline{t}-a(s_u^2+\overline{u}^2)-b\overline{u}=0 \quad \text{et} \quad \overline{t}-a\overline{u}-b=0$$

ce qui est équivalent à

$$b=\overline{t}-a\overline{u} \quad \text{et} \quad \text{Cov}(u,t)+\overline{u}\,\overline{t}-a(s_u^2+\overline{u}^2)-(\overline{t}-a\overline{u})\overline{u}$$

soit encore

$$b=\overline{t}-a\overline{u} \quad \text{et} \quad \text{Cov}(u,t)-as_u^2=0$$

Il y a donc bien un unique point critique.

(c) En utilisant les résultats précédents :

$$\boxed{\hat{a}=\frac{\text{Cov}(u,t)}{s_u^2} \quad \text{et} \quad \hat{b}=\overline{t}-\frac{\text{Cov}(u,t)}{s_u^2}\overline{u}}$$

11. (a) On a déjà vu que M est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathscr{F}$. En utilisant les résultats précédents, pour tout $(a,b)\in\mathscr{F}$:

$$\partial^2_{1,1}(\text{M})(a,b)=-\frac{n}{\sigma_2}(s_u^2+\overline{u}^2),\quad \partial^2_{1,2}(\text{M})(a,b)=\partial^2_{2,1}(\text{M})(a,b)=-\frac{n}{\sigma^2}\overline{u} \quad \text{et} \quad \partial^2_{2,2}(\text{M})(a,b)=-\frac{n}{\sigma^2}$$

On obtient alors la matrice hessienne suivant pour tout $(a,b)\in\mathscr{F}$:

$$\nabla^2(\text{M})(a,b)=\begin{pmatrix}-\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2+\overline{u}^2 & -\frac{n}{\sigma^2}\overline{u}\\ -\frac{n}{\sigma^2}\overline{u} & -\frac{n}{\sigma^2}\end{pmatrix}=-\frac{n}{\sigma^2}\begin{pmatrix}s_u^2+\overline{u}^2 & \overline{u}\\ \overline{u} & 1\end{pmatrix}$$

(b) On doit déterminer le signe des valeurs propres de la hessienne (qui ne dépend pas de (a, b), et qui existe car la matrice est diagonalisable). $\nabla^2(\mathrm{M})(a, b) - \lambda \mathrm{I}_2$ n'est pas inversible si et seulement si

$$(-\frac{n}{\sigma^2} s_u^2 - \frac{n}{\sigma^2} \overline{u}^2 - \lambda)(-\frac{n}{\sigma^2} - \lambda) - \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 \overline{u}^2 = 0$$

soit

$$\lambda^2 + \frac{n}{\sigma^2}(s_u^2 + \overline{u}^2 + 1)\lambda + \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 s_u^2 = 0$$

Notons λ_1 et λ_2 les valeurs propres. Par propriété des racines d'un trinôme du second degré, on a

$$\lambda_1 \lambda_2 = \left(\frac{n}{\sigma^2}\right)^2 s_u^2 > 0 \quad \text{et} \quad (\lambda_1 + \lambda_2) = -\frac{n}{\sigma^2}(s_u^2 + \overline{u}^2 + 1) < 0$$

Donc λ_1 et λ_2 sont de même signe (premier résultat) et toutes les deux négatives (deuxième résultat).

Par théorème, M admet un maximum local au point critique $(\hat{a}, \hat{b})$.

12. Soit (h, k) un couple de réels non nuls, tels que $(\hat{a} + h, \hat{b} + k) \in \mathscr{F}$. Notons $\mathrm{D}(h, k)$ le nombre

$$\mathrm{D}(h, k) = \mathrm{M}(\hat{a} + h, \hat{b} + k) - \mathrm{M}(\hat{a}, \hat{b}) = -\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} (t_i - (\hat{a} + h)u_i - (\hat{b} + k))^2 - (t_i - \hat{a}u_i - \hat{b})^2\right)$$

soit encore, en utilisant l'identité remarquable

$$\mathrm{D}(h, k) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - (\hat{a} + h)u_i - (\hat{b} + k) - (t_i - \hat{a}u_i - \hat{b})\right)\left(t_i - (\hat{a} + h)u_i - (\hat{b} + k) + (t_i - \hat{a}u_i - \hat{b})\right)$$

et donc

$$\mathrm{D}(h, k) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(-hu_i - k)(2t_i - 2\hat{a}u_i - 2\hat{b} - hu_i - k)$$

puis

$$\mathrm{D}(h, k) = -\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(hu_i + k)^2 - 2(t_i - \hat{a}u_i - \hat{b})(hu_i + k)$$

En développant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(h, k) = \quad &= \frac{1}{2\sigma^2}\Big(2h\sum u_i t_i - 2h\hat{a}\sum {u_i}^2 - 2h\hat{b}\sum u_i + 2k\sum t_i - 2k\hat{a}\sum u_i - 2nk\hat{b} \\
&\qquad - h^2\sum {u_i}^2 - 2hk\sum u_i - nk^2\Big) \\
&= \frac{1}{2\sigma^2}\Big(2hn\big(\mathrm{Cov}(u, t) + \bar{u}\bar{t}\big) - 2h\hat{a}n\big({s_u}^2 + \bar{u}^2\big) - 2h\hat{b}n\bar{u} + 2kn\bar{t} - 2k\hat{a}n\bar{u} - 2nk\hat{b} \\
&\qquad - h^2 n\big({s_u}^2 + \bar{u}^2\big) - 2hkn\bar{u} - nk^2\Big)
\end{aligned}$$

En utilisant $\hat{a} = \dfrac{\mathrm{Cov}(u, t)}{{s_u}^2}$ et $\hat{b} = \bar{t} - \hat{a}\bar{u}$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(h, k) \quad &= \frac{1}{2\sigma^2}\Big(2hn\big(\mathrm{Cov}(u, t) + \bar{u}\bar{t}\big) - 2h\frac{\mathrm{Cov}(u, t)}{{s_u}^2}n\big({s_u}^2 + \bar{u}^2\big) - 2h(\bar{t} - \hat{a}\bar{u})n\bar{u} + 2kn\bar{t} \\
&\qquad - 2k\hat{a}n\bar{u} - 2nk(\bar{t} - \hat{a}\bar{u}) - h^2 n\big({s_u}^2 + \bar{u}^2\big) - 2hkn\bar{u} - nk^2\Big)
\end{aligned}$$

puis en simplifiant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(h,k) &= \frac{1}{2\sigma^2}\left(2hn\bar{u}\bar{t} - 2h\frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{s_u{}^2}n\bar{u}^2 - 2hn\left(\bar{t} - \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{s_u{}^2}\bar{u}\right)\bar{u}\right.\\
&\qquad \left. -h^2ns_u{}^2 \underbrace{-h^2n\bar{u}^2 - 2hkn\bar{u} - nk^2}_{=-n(h\bar{u}+k)^2}\right)\\
&= -\frac{n}{2\sigma^2}\left(h^2s_u{}^2 + (h\bar{u}+k)^2\right) \leqslant 0
\end{aligned}$$

Puisque ceci est vrai pour tout (h,k), on en déduit que que $(\hat{a},\hat{b})$ est bien un maximum global.

13. (a) L'équation de régression de u et t est donnée par

$$t = a + bu \quad \text{avec} \quad b = \frac{\mathrm{Cov}(u,t)}{s_t^2} \quad \text{et} \quad a = \overline{u} - b\overline{t}$$

Dans l'énoncé, ils ont imposé plot2d(u,..., ce qui impose d'écrire plutôt

$$u = \frac{1}{b}t - \frac{a}{b}$$

d'où l'instruction

plot2d(u, variance(t)/corr(u,t,1)*u-mean(u)*variance(t)/corr(u,t,1)+mean(t))

Remarque : il aurait été beaucoup plus judicieux, de la part du concepteur de l'énoncé, de faire

plot2d(corr(u,t,1)/variance(t)*t+mean(u)-corr(u,t,1)/variance(t)*mean(t),t)

(b) Le point d'intersection des droites de régression repère le point moyen $(\overline{u},\overline{t})$.

(c) On obtient ainsi, graphiquement,

$$\overline{u} \approx 2,2 \quad \text{et} \quad \overline{t} \approx 2,9$$

(d) Les droites sont presque les mêmes. Il y a donc quasiment corrélation linéaire. Ainsi, le coefficient de corrélation empirique doit être proche de 1.

(e) On calcule l'écart à la droite de régression (t0-t). Le graphique représente donc, pour chacun des points, l'écart à la droite de régression. Par définition de la droite de régression, la moyenne des ordonnées doit être égale à 0.
On peut le vérifier : en effet

$$\bar{e} = \overline{t_0 - t} = \bar{t_0} - \bar{t} = \overline{a_0\ u + b_0} - \bar{t} = \overline{a_0\ u + b_0 - t} = 0$$

14. (a) D'après les propriétés de l'espérance (linéarité) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(\mathrm{A}_n) &= \frac{1}{n{s_u}^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})\,\mathrm{E}(\mathrm{T}_i)\\
&= \frac{1}{n{s_u}^2}\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})\,(au_i+b)\\
&= \frac{1}{n{s_u}^2}\sum_{i=1}^{n}\left(a{u_i}^2-au_i\bar{u}+bu_i-b\bar{u}\right)\\
&= \frac{1}{n{s_u}^2}\left(a\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-an\bar{u}^2+\cancel{nb\bar{u}}-\cancel{nb\bar{u}}\right)\\
&= \frac{1}{n{s_u}^2}\,a\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n}{u_i}^2-n\bar{u}^2\right)}_{=n{s_u}^2} \;=\; a.
\end{aligned}$$

Les variables $\mathrm{T}_1,\ldots,\mathrm{T}_n$ étant indépendantes :

$$\mathrm{V}(\mathrm{A}_n)=\left(\frac{1}{n{s_u}^2}\right)^2\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2\,\mathrm{V}(\mathrm{T}_i)=\left(\frac{1}{n{s_u}^2}\right)^2\sigma^2\sum_{i=1}^{n}(u_i-\bar{u})^2=\frac{\sigma^2}{n{s_u}^2}$$

Puisque A_n est une combinaison linéaire de variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale, A_n suit une loi normale de paramètre $\mathrm{E}(\mathrm{A}_n)$ et $\mathrm{V}(\mathrm{A}_n)$:

$$\mathrm{A}_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(a,\frac{\sigma^2}{n{s_u}^2}\right).$$

(b) Pour tout $\varepsilon>0$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A}_n-\varepsilon\leqslant a\leqslant \mathrm{A}_n+\varepsilon) &= \mathrm{P}(-\varepsilon\leqslant \mathrm{A}_n-a\leqslant\varepsilon)\\
&= \mathrm{P}\left(-\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\leqslant\frac{\mathrm{A}_n-a}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\leqslant\frac{\varepsilon}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}s_u}}\right)\\
&= \mathrm{P}\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\leqslant\frac{\sqrt{n}s_u}{\sigma}(\mathrm{A}_n-a)\leqslant\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\right)
\end{aligned}$$

Or, par définition de la loi normale, $\dfrac{\sqrt{n}s_u}{\sigma}(\mathrm{A}_n-a)\hookrightarrow\mathcal{N}(0,1)$. Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\mathrm{A}_n-\varepsilon\leqslant a\leqslant \mathrm{A}_n+\varepsilon) &= \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\right)\\
&= 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\right)-1 \qquad \text{(par propriété de }\Phi\text{)}
\end{aligned}$$

On a alors :

$$2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\right)-1=1-\alpha \;\Leftrightarrow\; \Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}\right)=1-\frac{\alpha}{2} \;\Leftrightarrow\; \frac{\varepsilon\sqrt{n}s_u}{\sigma}=d_\alpha$$

Bilan :

$$\left[\mathrm{A}_n - \frac{d_\alpha \sigma}{\sqrt{n} s_u}, \mathrm{A}_n + \frac{d_\alpha \sigma}{\sqrt{n} s_u}\right]$$

est un intervalle de confiance du paramètre a au niveau $1-\alpha$.