ECRICOME

Voie E

Mercredi 12 avril 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit*. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

Dans tout l'exercice, on notera $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 et I la matrice identité d'ordre 3.
On considère la matrice A définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'ensemble des matrices M de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$.

Partie A : Etude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. En déduire l'ensemble des valeurs propres de A.
3. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[$, $\varphi(x) = \sqrt{1+x}$.

4. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
5. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2, déterminer un réel α non nul tel que :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \text{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

6. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
7. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathscr{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

8. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $w = (1,0,1)$, $v = f(w) - w$, $u = f(v) - v$.
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathscr{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathscr{B}'$.
   (d) En déduire qu'il existe une matrice $\mathrm{P} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $\mathrm{T} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP}$.
9. Soit $\mathrm{N} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$, alors $\mathrm{NT} = \mathrm{TN}$. En déduire que N est de la forme

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $\mathrm{N}^2 = \mathrm{T}$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
10. Montrer que l'équation matricielle $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ d'inconnue $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
11. L'ensemble E des matrices appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{M}^2 = \mathrm{A}$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice 2

Dans tout l'exercice, a est un réel strictement positif.

Partie A

On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par : $\forall\, x > 0,\ \varphi(x) = \ln(x) - ax^{2a}$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$.
2. Etudier les variations de la fonction φ et dresser son tableau de variations.
   On fera apparaitre dans ce tableau le réel $x_0 = \left(\dfrac{1}{2a^2}\right)^{\frac{1}{2a}}$.
3. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, l'équation $\varphi(x) = 0$ admet exactement deux solutions z_1 et z_2, vérifiant : $z_1 < x_0 < z_2$.
   Que se passe-t-il si $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$? Si $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$?

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'ouvert $\mathrm{U} = (\mathbb{R}^{+*})^2$ par :

$$\forall\, (x, y) \in \mathrm{U}, \quad f(x, y) = \ln(x)\ln(y) - (xy)^a$$

4. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.
5. Calculer les dérivées partielles premières de f.
6. Démontrer que pour tout $(x, y) \in \mathrm{U}$:

$$(x, y) \text{ est un point critique de f} \iff \begin{cases} x = y, \\ \varphi(x) = 0. \end{cases}$$

7. Démontrer que si $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$, la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

   Déterminer aussi les éventuels points critiques de f dans les cas où $a = \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$ et $a > \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$

Partie C

Dans cette partie, on suppose que $a < \sqrt{\dfrac{1}{2\mathrm{e}}}$. On rappelle alors que la fonction f admet exactement deux points critiques : (z_1, z_1) et (z_2, z_2), où z_1 et z_2 sont les réels définis dans la partie A.

8. Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f.
9. Calculer la matrice hessienne de f au point (z_1, z_1). Vérifier que cette matrice peut s'écrire sous la forme :

$$\nabla^2(f)(z_1, z_1) = \begin{pmatrix} -a^2 z_1^{2a-2} & \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} \\ \frac{1}{z_1^2} - a^2 z_1^{2a-2} & -a^2 z_1^{2a-2} \end{pmatrix}$$

10. On pose $\mathrm{M} = \nabla^2(f)(z_1, z_1)$, $\mathrm{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

    Calculer MX_1 et MX_2, et en déduire les valeurs propres de M.
11. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_1, z_1) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?
12. La fonction f présente-t-elle un extremum local en (z_2, z_2) ?
    Si oui, est-ce un minimum ? Un maximum ?

Exercice 3

Soit n un entier naturel non nul.
On effectue une série illimitée de tirages d'une boule avec remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. Pour tout entier naturel k non nul, on note X_k la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au k-ième tirage.
Pour tout entier naturel k non nul, on note S_k la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages :

$$\mathrm{S}_k = \sum_{i=1}^{k} \mathrm{X}_i.$$

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n.

Exemple : avec $n = 10$, si les numéros obtenus aux cinq premiers tirages sont dans cet ordre $2, 4, 1, 5, 9$, alors on obtient : $\mathrm{S}_1 = 2, \mathrm{S}_2 = 6, \mathrm{S}_3 = 7, \mathrm{S}_4 = 12, \mathrm{S}_5 = 21$ et $\mathrm{T}_{10} = 4$.

Partie A

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de X_k ainsi que son espérance.
2. (a) Déterminer $\mathrm{T}_n(\Omega)$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = 1)$.

   (c) Montrer que :

$$\mathbb{P}(\mathrm{T}_n = n) = \left(\frac{1}{n}\right)^{n-1}$$

3. Dans cette question, $n = 2$. Déterminer la loi de T_2.
4. Dans cette question, $n = 3$. Donner la loi de T_3. Vérifier que $\mathbb{E}(T_3) = \frac{16}{9}$.

Partie B

5. Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
6. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$.
   (a) Exprimer S_{k+1} en fonction de S_k et de X_{k+1}.
   (b) En utilisant un système complet d'évènements lié à la variable aléatoire S_k, démontrer que :
$$\forall\ i \in [\![k+1, n]\!], \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j)$$
7. (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \mathbb{N}^*$, rappeler la formule du triangle de Pascal liant les nombres : $\binom{j-1}{k-1}, \binom{j-1}{k}$ et $\binom{j}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout entier naturel i supérieur ou égal à $k+1$:
$$\sum_{j=k}^{i-1} \binom{j-1}{k-1} = \binom{i-1}{k}$$
   (c) Pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, on note $\mathscr{H}_k$ la proposition :
$$\text{“}\forall\ i \in [\![k, n]\!], \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k}\binom{i-1}{k-1}\text{''}$$
   Démontrer par récurrence que pour tout entier $k \in [\![1, n]\!]$, $\mathscr{H}_k$ est vraie.
8. (a) Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$. Comparer les évènements $[T_n > k]$ et $[S_k \leqslant n-1]$.
   (b) En déduire que : $\forall\ k \in [\![0, n-1]\!], \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k}\binom{n-1}{k}$.
9. Démontrer que $\mathbb{E}(T_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(T_n > k)$, puis que $\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}$.
10. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

Partie C

Dans cette partie, on fait varier l'entier n et on étudie la convergence en loi de la suite de variables $(T_n)_{n\geqslant 1}$ obtenue.

11. Soit Y une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que : $\forall\ k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{P}(Y = k) = \dfrac{k-1}{k!}$.
   (a) Vérifier par le calcul que $\sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(Y = k) = 1$.
   (b) Montrer que Y admet une espérance et calculer cette espérance.
12. Pour tout entier naturel k non nul, démontrer que :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$$
13. Démontrer alors que $(T_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers la variable aléatoire Y.
14. On rappelle qu'en langage Scilab, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` renvoie un entier aléatoire de $[\![1, n]\!]$. Compléter la fonction ci-dessous, qui prend en argument le nombre n de boules contenues dans l'urne, afin qu'elle simule la variable aléatoire T_n :

Programme Scilab 1 : Loi de T

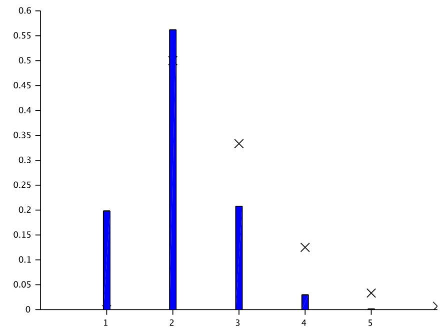
```
function y=T(n)
    S=...............
    y=...............
    while ..........
        tirage = grand(1,1,'uin',1,n)
        S=S+tirage
        y=..........
    end
endfunction
```

15. On suppose déclarée la fonction précédente et on écrit le script ci-dessous :

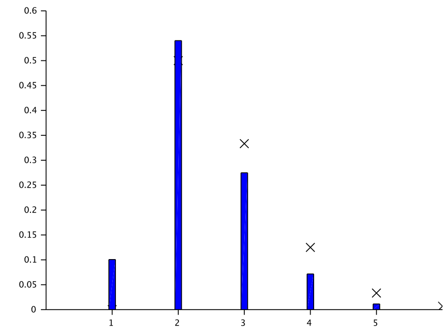
Programme Scilab 2 : Convergence en loi

```
function y=freqT(n)
    y=zeros(1,n)
    for i=1:100000
        k=T(n)
        y(k)=y(k)+1
    end
    y=y/100000
endfunction

function y=loitheoY(n)
    y=zeros(1,n)
    for k=1:n
        y(k)=(k-1)/prod(1:k)
    end
endfunction

clf
n=input('n= ?')
plot2d(loitheoY(6),style=-2)
x=freqT(n)
bar(x(1:5))
```

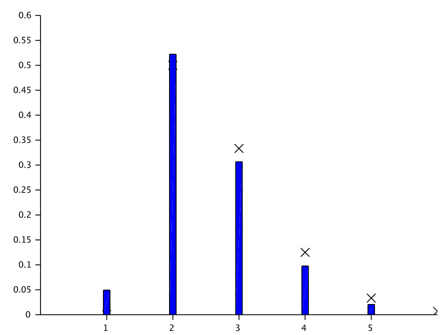
L'exécution de ce script pour les valeurs de n indiquées a permis d'obtenir les graphes ci-dessous :



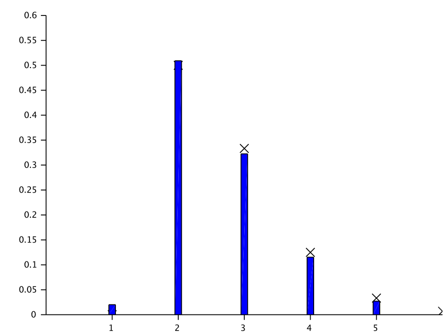
n=5



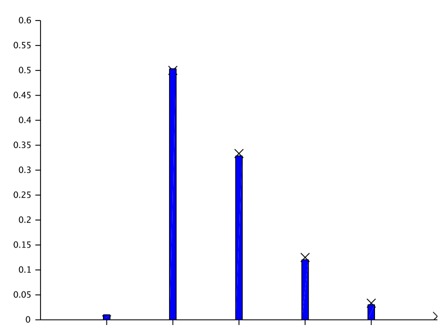
n=10



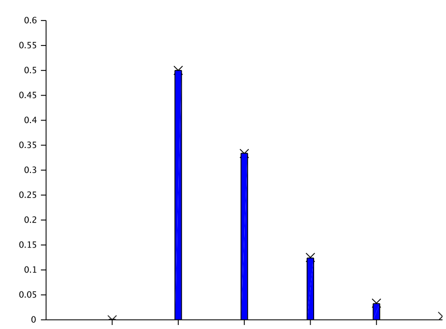
n=20



n=50



n=100



n=1000

(a) Expliquer ce que représentent les vecteurs renvoyés par les fonctions `freqT` et `loitheoY`. Comment ces vecteurs sont-ils représentés graphiquement dans chaque graphique obtenu ?

(b) Expliquer en quoi cette succession de graphiques permet d'illustrer le résultat de la question 13.