CHAPITRE 0

PRÉPARATIONS

Résumé

Ce chapitre a pour objectif d'effectuer des révisions de bases des années précédentes : ensembles usuels, calculs fractionnaires et de puissances, développement et factorisation, équations et inéquations.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① connaitre les ensembles usuels .... □

② savoir calculer et simplifier des résultats :

- en simplifiant des fractions .... □
- en développant et en factorisant .... □
- en calculant avec des puissances .... □
- en simplifiant des racines carrées .... □

③ savoir résoudre des questions et inéquations .... □

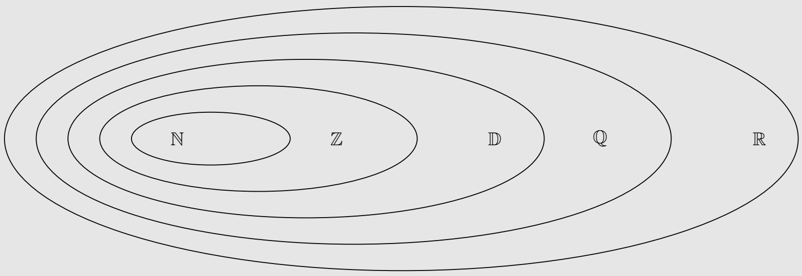
I. Ensembles de nombres

Définition 1 (Ensembles usuels)**.** — On dispose des cinq ensembles usuels suivants :

- L'ensemble $\mathbb{N}$ des **entiers naturels**
$$\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; \cdots\}$$
- L'ensemble $\mathbb{Z}$ des **entiers relatifs**
$$\mathbb{Z} = \{\cdots; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \cdots\}$$
- L'ensemble $\mathbb{D}$ des nombres décimaux, c'est-à-dire les nombres ayant un nombre fini de chiffres après la virgule.
- L'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, c'est-à-dire les nombres s'écrivant sous la forme $\frac{p}{q}$, où p est un entier relatif, et q un entier naturel.
- L'ensemble $\mathbb{R}$ de l'ensemble des nombres réels.

Exemple 1. — Par exemple,
$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q}, \quad 0,41 \in \mathbb{D}, \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

Propriété 1. — *On dispose des inclusions suivantes :*
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Démonstration. Par définition, $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, et $Z \subset \mathbb{D}$ (car les entiers relatifs ont un nombre fini de chiffres après la virgule, à savoir 0). $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ par définition également. Il reste à voir que $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$.

Soit $a \in \mathbb{D}$. Alors a possède un nombre fini de chiffres après la virgule ; on note d le nombre de chiffres après la virgule. Alors,
$$b = 10^d a \in \mathbb{Z}$$
et donc
$$a = \frac{b}{10^d} \in \mathbb{Q}$$
□

Notation 1. — On note
$$\mathbb{R}_+ = [0; +\infty[= \{x \in \mathbb{R}, \quad x \geqslant 0\}$$
De même, on note
$$\mathbb{R}_- =]-\infty; 0] = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant 0\}$$
On note $\mathbb{R}_+^* =]0; +\infty[$, et de même pour $\mathbb{R}_-^*$. Les notations $+, -$ et $*$ s'étendent à tous les ensembles vus

précédemment.

Exercice 1. — Décrire les ensembles $\mathbb{Z}_-^*$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}_-$ et $\mathbb{Q}_-$.

Solution. Rapidement, $\mathbb{Z}_-^*$ sont les entiers strictement négatifs, $Z_+ = \mathbb{N}$, $\mathbb{N}_- = \{0\}$ et $\mathbb{Q}_-$ sont les rationnels négatifs.

II. Calculs

1) Calcul fractionnaire

Les règles de calcul sur les fractions doivent être maitrisées dès le début d'année. Rappelons-les :

Propriété 2. — *Pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}_*$:*

$$\frac{0}{b} = 0 \qquad \frac{a}{1} = a \qquad \frac{a}{-1} = -a$$

$$\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b} = -\frac{a}{b}$$

$$\frac{a}{b} = a\frac{1}{b} = \frac{1}{b}a$$

$$\frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a};$$

pour $k \in \mathbb{R}_*$

$$\frac{a}{b} = \frac{k \times a}{k \times b}$$

et si $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}_*$:

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Exercice 2. — Calculer $\mathrm{A} = \frac{\frac{3}{7}}{\frac{2}{5}}$, $\mathrm{B} = \frac{\frac{2}{3}}{6}$, $\mathrm{C} = 3 \times \frac{7}{18}$ et $\mathrm{D} = \frac{4+17}{11+4}$.

Solution. En appliquant ce qui précède, on a rapidement :

$$\mathrm{A} = \frac{15}{14}, \quad \mathrm{B} = \frac{1}{9}, \quad \mathrm{C} = \frac{7}{6}$$

Enfin, attention : on ne simplifie pas comme on le veut dans une fraction (il faut d'abord factoriser). Ici

$$\mathrm{D} = \frac{21}{15} = \frac{7}{5}$$

2) Développement et factorisation

Développer une expression c'est l'écrire sous la forme d'une somme ; factoriser c'est l'écrire sous la forme d'un produit. Par exemple :

$$(x+1)(x+2) = x^2+3x+2 \text{ est un développement}$$
$$x^2+2x = x(x+2) \text{ est une factorisation}$$

Les identités suivantes sont à connaître :

Propriété 3 (Identités remarquables)**.** — *On dispose des identités suivantes :*

- *Pour tous réels a et b :*

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2\\ (a-b)^2 &= a^2-2ab+b^2\\ a^2-b^2 &= (a-b)(a+b)\end{aligned}$$

- *Pour tous réels a et b :*

$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\\ (a-b)^3 &= a^3-3a^2b+3ab^2-b^3\\ a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2)\\ a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2)\end{aligned}$$

Exercice 3. — Développer, pour tout réel x, $(x+1)^2$, $(x+1)^3$, $(1-x)^2$ et $(1-x)^3$. Factoriser $4-x^2$ et $8+x^3$.

Solution. En utilisant les identités remarquables :

$$\begin{aligned}(x+1)^2 &= x^2+2x+1\\ (x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1\\ (1-x)^2 &= x^2-2x+1\\ (1-x)^3 &= 1-3x+3x^2-x^3\\ 4-x^2 &= (2-x)(2+x)\\ 8+x^3 &= (2+x)(4-2x+x^2)\end{aligned}$$

3) Puissances

Rappelons la définition de la puissance entière d'un nombre réel :

Définition 2. — Soit a un réel non nul, et $n \in \mathbb{N}$. On définit a^n de la manière suivante :

- $a^0 = 1$;
- $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ fois}}$ si $n \geqslant 1$.

De plus, on note

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

On définit ainsi a^n pour $n \in \mathbb{Z}$.

Exemple 2. — On a $2^6 = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2 = 64$, $(-12)^1 = -12$ et $(1409091)^0 = 1$.

Propriété 4. — *Soient a et b deux réels non nuls, et n, m deux entiers relatifs.*

- *(puissances différentes)*

$$a^n \times a^m = a^{n+m}; \quad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \quad et \quad (a^n)^m = a^{nm};$$

- *(puissances identiques)*

$$a^n \times b^n = (a\times b)^n \quad et \quad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n.$$

Exercice 4. — Simplifier

$$\mathrm{A} = \frac{5^4\times 3^2\times 2^3}{15^3} \quad \text{et} \quad \frac{21\times 10^{-3}}{3\times 10^2}.$$

Solution. En utilisant la propriété précédente :

$$\mathrm{A} = 5^1\times 3^{-1}\times 2^3 = \frac{40}{3}$$

$$\mathrm{B} = \frac{21}{3}\times\frac{10^{-3}}{10^2} = 7\times 10^{-5}$$

4) Racine carrée

Commençons par un rappel de la définition de la racine carrée d'un réel positif :

Définition 3. — Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Il existe un unique réel positif, noté $\sqrt{a}$, vérifiant

$$(\sqrt{a})^2 = a.$$

Ce nombre $\sqrt{a}$ est appelé “racine carrée” de a.

Remarque 1. — On dispose des valeurs remarquables suivantes :

$$\sqrt{0} = 0, \quad \sqrt{1} = 1, \quad \sqrt{4} = 2 \quad \text{et} \quad \sqrt{9} = 3$$

⚠ — On ne dispose pas de la racine carrée d'un nombre strictement négatif. Ainsi, la fonction racine carrée n'est définie que sur $\mathbb{R}_+$.

Propriété 5. — *Soient a et b deux réels positifs. Alors*

$$\sqrt{a\times b} = \sqrt{a}\times\sqrt{b}$$

et si $b \neq 0$, alors

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

⚠ — **Attention** : en règle général, $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a}+\sqrt{b}$! Par exemple, $\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ et ce n'est pas égal à $\sqrt{1}+\sqrt{1}=2$.

Exercice 5. — Simplifier $\sqrt{8}$, $\sqrt{48}$ et $\sqrt{\dfrac{9}{32}}$.

Solution. Rapidement

$$\sqrt{8}=\sqrt{4\times 2}=2\sqrt{2},\quad \sqrt{48}=4\sqrt{3}\quad \text{et}\quad \sqrt{\frac{9}{32}}=\frac{3}{4\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{8}$$

III. Equations, inéquations

1) Equations

Une équation est une égalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s). En général, les inconnues sont notées $x, y, z, \ldots$.

Exemple 3. — L'équation $x^2+x=3-x$ est une équation faisant intervenir une variable. L'équation $x+y=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$ fait intervenir deux variables, x et y.

Définition 4. — Résoudre une équation, c'est déterminer l'ensemble de <u>toutes</u> les inconnues vérifiant l'équation ; on parle alors d'une solution de l'équation, et on recherche toutes les solutions de l'équation.

<u>Méthode 0.1.</u>

La première chose à faire et de trouver les valeurs interdites (division par 0, par exemple).

Pour résoudre ensuite une équation, il n'y a pas de méthode universelle : on applique toutes propriétés possibles (multiplication, division) en raisonnant si possible par équivalence pour trouver les solutions.

Exercice 6. — Résoudre l'équation

$$\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1$$

Solution. Déjà, il faut éviter -2 et 0. On se place sur $\mathbb{R}\setminus\{-2;0\}$. Alors, en multipliant par $x(x+2)$ (qui ne s'annule alors pas) :

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2}+\frac{x+1}{x}=1 \text{ équivaut à } & x+(x+2)(x+2)=x(x+1)\\ \text{soit } & x+x^2+3x+2=x^2+2x\\ \text{ce qui donne } & 2x=-2\\ \text{et donc } & x=-1\end{aligned}$$

Cette solution est autorisée (car différente de 0 et -2). On a procédé par équivalence, et on peut conclure que l'ensemble des solutions est $\{-1\}$, ce qu'on note, en général

$$\mathscr{S} = \{-1\}$$

Remarque 2. — On aurait pu, au lieu de mettre des mots en français, écrire $\Longleftrightarrow$. En général, on évitera l'enchaînement de symbole équivalent et implication, souvent illisible. On y reviendra dans le chapitre suivant.

2) Inéquations

Une inéquation est une inégalité faisant apparaitre une, ou plusieurs inconnue(s).

Résoudre une inéquation, c'est trouver toutes les solutions de l'inéquation, c'est-à-dire trouver toutes les valeurs de l'inconnue vérifiant l'inégalité.

Méthode 0.2.

Pour résoudre une inéquation, on procède comme pour les équations, en utilisant les règles de calculs pour les inégalités.

Propriété 6. — *Pour tous réels x et y*

- *Pour tout réel k, $x \leqslant y$ si et seulement si $x + k \leqslant y + k$;*
- *pour tout réel $k > 0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $k \times x \leqslant k \times y$;*
- *pour tout réel $k < 0$, $x \leqslant y$ si et seulement si $k \times x \geqslant k \times y$;*

On retiendra que multiplier par un nombre strictement positif conserve l'ordre, alors que multiplier par un nombre strictement négatif renverse l'ordre.

Remarque 3. — La propriété précédente est valable en remplaçant $\leqslant$ par $<$, $>$ et $\geqslant$.

Exemple 4. — Résoudre l'inéquation

$$-2(x-4) \geqslant 3x - 2$$

Solution. Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} -2(x-4) \geqslant 3x-2 &\text{ soit } -2x+8 \geqslant 3x-2 \\ &\text{ et donc } -5x \geqslant -10 \\ &\text{ puis } x \leqslant 2 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité est vérifiée pour tout $x \leqslant 2$:

$$\mathscr{S} = \{x \in \mathbb{R}, \quad x \leqslant 2\} =]-\infty ; 2]$$

Exercices

Ensembles

Exercice 7. ●○○ — Montrer que $\mathbb{Z} \not\subset \mathbb{N}$, $\mathbb{D} \not\subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{D}$.

Calculs

Exercice 8. ●○○ — Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme d'une fraction irréductible.

$$A = \frac{4}{3} \times \left(\frac{13}{4} - \frac{12}{6}\right) \qquad B = \frac{4}{3} - 1$$

$$C = \frac{\frac{1}{3} + 2}{\frac{5}{6} - 1} \qquad D = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{2}{5} + \frac{3}{8}}$$

Exercice 9. ●○○ — Simplifier les expressions suivantes.

$$A = \frac{4 \times 10^{12} \times 9 \times 10^{-5}}{1,2 \times 10^2} \qquad B = \frac{4 \times 7^2 - 2^5 \times 3}{4^4 - 4^3}$$

$$C = \frac{3^2 \times 27}{81^2} \qquad D = 4 \times (2^2 - 2^4)^2 - 64$$

Exercice 10. ●○○ — Calculer $(-1)^n$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots, 5$. Que constate-t-on ? Déterminer la valeur de $(-1)^n$ pour tout entier naturel n.

Exercice 11. ●○○ —

1. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a\sqrt{b}$ avec a et b entiers, b le plus petit possible.

$$A = \sqrt{54} - 3\sqrt{96} - 5\sqrt{24} \qquad B = \sqrt{160} \times \sqrt{40} \times \sqrt{90}$$

2. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme $a + b\sqrt{c}$ avec a, b et c entiers.

$$C = \left(3\sqrt{10} - 5\sqrt{3}\right)^2 \qquad D = \left(3\sqrt{5} + 2\sqrt{6}\right)^2$$

3. Calculer les expressions suivantes et donner le résultat sous la forme d'un nombre entier.

$$E = \left(3 - 2\sqrt{5}\right)\left(3 + 2\sqrt{5}\right) \qquad F = \frac{24\sqrt{45}}{9\sqrt{80}}$$

Développement, factorisation

Exercice 12. ●○○ — Factoriser chacune des expressions littérales suivantes :

$A = 64\,x^2 - 100$
$B = -\,(9\,x-2)\times(4\,x+9)+(3\,x-8)\times(9\,x-2)$
$C = 16\,x^2 - 24\,x + 9$
$D = (x+5)^2 - 81$
$E = (-8\,x+2)^2 + (-8\,x+2)\times(8\,x+4)$
$F = (9\,x+7)\times(3\,x+3)+9\,x+7$

Exercice 13. ●○○ — Développer chacune des expressions littérales suivantes :

$A = (4\,x+4)\times(4\,x-4)$
$B = (5\,x+10)^2$
$C = (10\,x-2)\times(10\,x+2)$
$D = \left(\dfrac{1}{8}\,x - \dfrac{10}{3}\right)^2$
$E = (-5\,x+9)\times(8\,x-2)-7\,x-8$
$F = (9\,x+2)\times(-3\,x-5)+4$
$G = (-8\,x+4)\times(9\,x-8)+2\,x^2$

Equations

Exercice 14. ●○○ — Résoudre les équations suivantes :

1) $(2x-1)(x+1) = x+1$.
2) $\dfrac{x^2-2}{x+1} = x+4$.

Exercice 15. ●○○ — Soit f la fonction définie par $f : x \mapsto -0.5\,x^2 - 7\,x - 22.5$.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -0.5\,(x+9)\,(x+5)$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $f(x) = -0.5\,(x+7)^2 + 2$.
2. Résoudre les équations suivantes en choisissant la forme appropriée de f.
   (a) $f(x) = 0$
   (b) $f(x) = -22.5$
   (c) $f(x) = 2$

Exercice 16. ●●○ — On note (E) l'équation $2x^2 + 11x - 4 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet deux solutions, qu'on notera x_1 et x_2 et qu'on ne calculera pas.
2. Donner les valeurs de $x_1 + x_2$ et $x_1 x_2$.
3. En déduire la valeur de $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$.
4. Calculer $x_1^2 + x_2^2$.
5. Calculer $x_1^3 + x_2^3$.
6. Calculer $\dfrac{1}{x_1+1} + \dfrac{1}{x_2+1}$.

Inéquations

Exercice 17. ●○○ — Résoudre l'inéquation :

$$\frac{-6x+5}{6}-\frac{3x-10}{2}\geqslant\frac{9x+8}{3}$$

Exercice 18. ●○○ — Résoudre l'inéquation :

$$\frac{4x-5}{9}-\frac{6x+9}{4}<\frac{9x+5}{6}$$

Exercice 19. ●○○ — Résoudre l'inéquation :

$$(2x-1)(1-3x)<0$$

Exercice 20. ●○○ — Résoudre l'inéquation :

$$3x+5\geqslant(x+6)\times(3x+5)$$

Exercice 21. ●○○ — Résoudre l'inéquation :

$$\frac{(x+1)(x-2)}{2x+1}>0$$

Exercice 22. ●○○ — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $(2x+3)(3x-5)(7-x)<0$.

Exercice 23. ●○○ — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x(x+1)\geqslant(1-3x)(x+1)$.

Exercice 24. ●○○ — Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $x^3-x\leqslant 2x^2-2$.