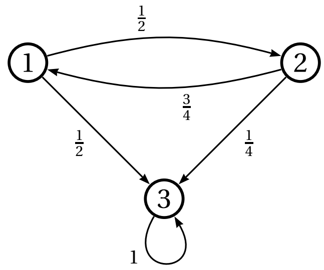
TD Chaînes de Markov à temps discret

ENSSAT

12 décembre 2018

Exercice 1

1. En utilisant la matrice de transition :



   On constate alors que l'état 3 est absorbant, les états 1 et 2 sont communiquants.

2.

   (a) Tout d'abord $\mathbb{P}(\mathrm{N}=0)=0$ puisqu'à l'état 0, $\mathrm{X}_0=1$. Ensuite, on constate par propriété du graphe de transition que, pour tout $k \geqslant 0$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{N}=2k+1|\mathrm{X}_0=1) = \mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+1) &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_1=2,\mathrm{X}_2=1,\ldots,\mathrm{X}_{2k-1}=2,\mathrm{X}_{2k}=1,\mathrm{X}_{2k+1}=3|\mathrm{X}_0=1)\\
&= \frac{\mathbb{P}(\mathrm{X}_0=1,\mathrm{X}_1=2,\mathrm{X}_2=1,\ldots,\mathrm{X}_{2k-1}=2,\mathrm{X}_{2k}=1,\mathrm{X}_{2k+1}=3)}{\mathbb{P}(\mathrm{X}_0=1)}\\
&= \frac{p_1(0)p_{1,2}p_{2,1}\ldots p_{1,2}p_{2,1}p_{1,3}}{p_1(0)} \text{ par propriété des chaînes de Markov}\\
&= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^k\frac{1}{2}\\
&= \left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

   Ainsi, et par le même raisonnement :

$$\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+1)=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\right)^k\frac{1}{2}=\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+2)=\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{8}$$

   (b) Pour démontrer rigoureusement le résultat, calculons $\mathbb{P}(\mathrm{N}<\infty)$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(\mathrm{N}<\infty) &= \mathbb{P}_1(\mathrm{N}\in\mathbb{N})\\
&= \mathbb{P}_1\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}\mathrm{N}=k\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=k)\\
&= 0+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{4}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^k\frac{1}{8}\\
&= \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{8}}+\frac{1}{8}\frac{1}{1-\frac{3}{8}}=1
\end{aligned}$$

   Ainsi, $\mathbb{P}(\mathrm{N}=\infty)=0$: presque sûrement, on atteint forcément l'état 3.

(c) Pour déterminer le nombre moyen de transition avant d'atteindre l'état 3, on va calculer l'espérance de N, en rappelant le résultat

$$\sum_{k=0}^{\infty} kp^k = \frac{p}{(1-p)^2}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{N}] &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=k)\\
&= 0 + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+1) + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)\mathbb{P}_1(\mathrm{N}=2k+2)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2)\left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{8}\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{3}{8}\right)^k + \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{2} + k\left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^k \frac{1}{4}\\
&= \frac{5}{4}\sum_{k=0}^{\infty} k\left(\frac{3}{8}\right)^k + \frac{3}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^k\\
&= \frac{5}{4}\frac{\frac{3}{8}}{\left(1-\frac{3}{8}\right)^2} + \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{3}{8}}\\
&= \frac{12}{5}
\end{aligned}$$

En moyenne, il faudra donc $\frac{12}{5} = 2,4$ étapes avant d'atteindre l'état absorbant.

3. (a) On souhaite diagonaliser P. On cherche donc les valeurs propres de P. Notons χ_{P} le polynôme caractéristique de P. Alors :

$$\begin{aligned}
\chi_{\mathrm{P}}(\mathrm{X}) &= \begin{vmatrix} \mathrm{X} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{3}{4} & \mathrm{X} & -\frac{1}{4}\\ 0 & 0 & \mathrm{X}-1 \end{vmatrix}\\
&= (\mathrm{X}-1)\left(\mathrm{X}^2 - \frac{3}{8}\right)
\end{aligned}$$

P est diagonalisable et a donc 3 valeurs propres simples (polynôme scindé à racines simples) : 1 (ce qui était sûr, puisque P est une matrice stochastique), $\sqrt{\frac{3}{8}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{8}}$.

Sans déterminer les vecteurs propres, remarquons que $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1 (classique).

Si $\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ est associé à une des deux autres valeurs propres, constatons que

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} u\\ v\\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\\ \beta\\ w \end{pmatrix}$$

où α, β dépendent de u, v et w. Mais alors, si $\begin{pmatrix} u & v & w \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ est associé à une des valeurs propres λ différentes de 1, on aurait

$$\mathrm{P}\begin{pmatrix} u\\ v\\ w \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u\\ v\\ w \end{pmatrix}$$

ce qui implique que $w = \lambda w$ et donc $w = 0$.

Ainsi, les vecteurs propres associés à $\sqrt{\frac{3}{8}}$ et $-\sqrt{\frac{3}{8}}$ vont nécessairement s'écrire sous la forme $\begin{pmatrix} x & y & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$ et $\begin{pmatrix} z & t & 0 \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$

Bilan : Puisque P est diagonalisable, en notant
$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{\frac{3}{8}} \end{pmatrix}$, et $Q = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 1 & y & t \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, on a bien $P = QDQ^{-1}$

(b) Remarquons que $-1 < \sqrt{\frac{3}{8}} < 1$ et $-1 < -\sqrt{\frac{3}{8}} < 1$. Ainsi, D^n converge vers une matrice limite qui est $D_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Par produit, P^n converge vers la matrice $QD_\infty Q^{-1}$. Or, puisque

$$p(n) = p(0)P^n$$

on en déduit que $(p(n))$ converge quand $n \to +\infty$ vers

$$\pi = p(0)QD_\infty Q^{-1}.$$

(c) Intuitivement, l'état 3 étant absorbant et, d'après la question 2, on y arrive en temps fini presque sûrement, le vecteur stationnaire devrait être $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (stabilité dans l'état 3).
Pour déterminer π, on utilise la propriété $\pi P = \pi$ en sachant que π est un vecteur de probabilité. Ainsi, en notant $\pi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ alors on a

$$\pi P = \pi \quad \text{et} \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

or

$$\pi P = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}\beta & \frac{1}{2}\alpha & \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \gamma \end{pmatrix}$$

Ainsi, on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} \frac{3}{4}\beta = \alpha \\ \frac{1}{2}\alpha = \beta \\ \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{4}\beta + \gamma = \gamma \end{cases} \sim \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur stationnaire est, comme attendu, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et cela ne dépend pas de l'état initial : il y a **ergodicité**.

Exercice 2

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de $P = (p_{i,j})$, et $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Il existe un indice d tel que

$$|x_d| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

Considérons alors $Y = PX$ et on regarde y_d (en notant $Y = (y_d)$) :

$$\begin{aligned} y_d &= \sum_{i=1}^{n} p_{d,i} x_i \\ \text{et donc } |y_d| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |p_{d,i}| \cdot |x_i| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{n} p_{d,i} |x_d| \text{ car } p_{d,i} \geqslant 0 \\ &\leqslant |x_d| \text{ car } \sum_{i=1}^{n} p_{d,i} = 1 \end{aligned}$$

Or PX = λX donc $y_d = \lambda x_d$ et le résultat précédent nous donne

$$|\lambda x_d| = |y_d| \leqslant |x_d|$$

Puisque $|x_d| \neq 0$ (car sinon X est nul ce qui est impossible pour un vecteur propre) on en déduit que $|\lambda| \leqslant 1$.

Exercice 3

a. Tous les états communiquent : la chaîne est **irréductible**. Puisqu'il y a un nombre fini d'état, tous les états sont donc **récurrents**.
Aucun état n'est absorbant.
Enfin, chaque état est **périodique de périodicité** 6 par construction de la chaîne.

b. Tous les états communiquent : la chaîne est **irréductible** finie, donc tous les états sont **récurrents**.
Aucun état n'est absorbant.
Puisque 3 est **apériodique** (car $p_{33} = \frac{1}{2} > 0$), et que la chaîne est irréductible, on en déduit que la chaîne est donc elle-même **apériodique**.

c. Tous les états communiquent, donc la chaîne est **irréductible**, et étant finie, tous les états sont récurrents.
Aucun état n'est absorbant.
Enfin, l'état 2 est de périodicité 3 et puisque la chaîne est irréductible, tous les états sont **de périodicité** 3.

d. La chaîne n'est pas irréductible : en effet les états 1 et 2 ne communiquent pas. En revanche :
   - Les états 2 et 3 communiquent ; les états sont récurrents car une fois dans la chaîne 2 – 3, on y reste ;
   - Les états 5 et 6 communiquent ; les états sont récurrents car une fois dans la chaîne 5 – 6, on y reste ;
   - 1 est **transitoire** puisque $f_{11} = 0$. Sa **périodicité** est infinie.
   - 4 est **transitoire** car dès qu'on quitte 5, on n'y revient jamais.

   Il n'y a pas d'état absorbant.
   $2, 3, 4, 5, 6$ sont apériodiques, car $p_{2,2} > 0$, $p_{3,3} > 0$, $p_{4,4} > 0$ $p_{5,5} > 0$ et $p_{6,6} > 0$.

e. De même la chaîne n'est pas irréductible. 2 et 4 sont accessibles à partir de 1 mais 1 n'est pas accessible. 2 et 3 communiquent, 5 et 6 également.
   - L'état 1 est **transitoire**, car $f_{1,1} = 0$ et est de **périodicité infinie**.
   - L'état 4 est également **transitoire** car une fois quitté, on ne peut pas revenir à l'état 4.
   - Les états 2 et 3 sont également **transitoire**, car une fois la chaîne 2 – 3 quittée, on ne peut y revenir.
   - Les états 5 et 6 sont **récurrents** car une fois dans la chaîne 5 – 6, on y reste.

   Il n'y a pas d'état absorbant.
   Les états $2, 3, 4, 5$ et 6 sont apériodiques (car $p_{i,i} > 0$ si $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$).

f. 0 et 1 communiquent. 2 et 3 sont accessibles à partir de 1 et 0 respectivement. La chaîne n'est donc pas irréductible.
   - Les états 0 et 1 sont transitoires, car une fois la chaîne 0 – 1 quittée, on n'y revient pas. Ils sont également apériodiques car $p_{0,0} > 0$ et $p_{1,1} > 0$.
   - Les états 2 et 3 sont **absorbants**, **apériodique** et **récurrents**.

   La chaîne est donc apériodique, puisque tous ses états le sont.
