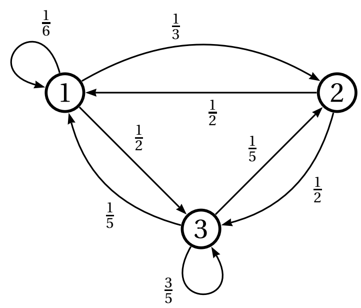
TD Chaînes de Markov à temps discret

ENSSAT

19 décembre 2018

Exercice 4

1. Rapidement, on constate que la somme des coefficients de chaque ligne fait bien 1.
2. Le graphe de transition est donné par :



3. On constate que la chaîne est irréductible car tous les états communiquent. Etant finie, la chaîne est donc irréductible récurrente. Puisque 3 est apériodique, tous les états le sont et la chaîne est apériodique.
4. La chaîne est irréductible, apériodique, et le nombre d'états est fini. D'après le théorème ergodique principal, il y a ergodicité. Pour déterminer le vecteur de probabilité stationnaire, on résout $\pi P = \pi$ avec $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ et $a+b+c=1$. On obtient alors

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{7}{36} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}$$

5. On utilise la définition des probabilités conditionnelles :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_{n+1} = 2 | X_n = 1, X_{n+1} \neq 1) &= \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2 | X_{n+1} \neq 1) \\
&= \frac{\mathbb{P}_{X_n=1}((X_{n+1} = 2) \cap (X_{n+1} \neq 1))}{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} \neq 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2)}{\mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 2) + \mathbb{P}_{X_n=1}(X_{n+1} = 3)} \\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Exercice 5

1. Tous les états communiquent : la chaîne est donc irréductible. De plus, l'état 1 (par exemple) est apériodique car $p_{1,1} > 0$: la chaîne est donc irréductible, finie, apériodique. D'après le théorème ergodique principale, la distribution limite π existe et ne dépend pas de l'état initial. En résolvant $\pi P = \pi$ où $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ avec $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$, $a+b+c=1$, on obtient la distribution limite :

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} & \frac{2}{5} & \frac{3}{25} \end{pmatrix}$$

2. Par définition, $p(1) = p(0)P = \pi P = \pi$, et par récurrence rapide, pour tout $n \geqslant 2$, $p(n) = \pi$.

3. Par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 2 | X_2 \in \{1,2\}, X_1 = 2) &= \frac{\mathbb{P}(X_3 = 2 \cap (X_2 \in \{1,2\}) | X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 \in \{1,2\} | X_1 = 2)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_3 = 2, X_2 = 1 | X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_3 = 2, X_2 = 2 | X_1 = 2)}{\mathbb{P}(X_2 = 1 | X_1 = 2) + \mathbb{P}(X_2 = 2 | X_1 = 2)} \\
&= \frac{p_{2,1} p_{1,2} + p_{2,2} p_{2,2}}{p_{2,1} + p_{2,2}} \\
&= \frac{17}{40}
\end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_3 = 2 | X_2 \in \{1,2\}) &= \frac{\mathbb{P}(X_3 = 2 \cap (X_2 \in \{1,2\})}{\mathbb{P}(X_2 \in \{1,2\})} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X_3 = 2 \cap (X_2 = 1)) + \mathbb{P}(X_3 = 2 \cap (X_2 = 2))}{\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_2 = 2)} \\
&= \frac{p_{1,2} p_1(2) + p_{2,2} p_2(2)}{p_1(2) + p_2(2)} = \frac{8}{25}
\end{aligned}$$

On n'obtient pas la même probabilité. En effet, dans le premier cas, on a une information supplémentaire sur la manière de venir en 1 ou 2, et pas dans le deuxième cas.

Exercice 6

1. La chaîne est récurrente, irréductible et apériodique. Elle possède donc une distribution limite. Toujours par la même méthode, on obtient

$$\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

2. Dans l'exemple donné, on a trois séjours dans l'état 2, de durées respectives 2, 4 et 1.
3. Dans l'exemple toujours, le temps total est de 7, sur une trajectoire de 19 temps. Empiriquement, la limite de $\dfrac{N_n}{n}$ doit être la probabilité d'être dans l'état 2 à l'état stationnaire, c'est-à-dire $\frac{1}{6}$.
4. D'après le cours, la variable aléatoire S_2 du temps de séjour dans l'état 2, conditionnellement à $[X_0 = 2]$, suit une loi géométrique de paramètre $1 - p_{33} = \frac{5}{6}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(S_2 = 4 | X_0 = 2) &= p_{33}^{4-1}(1 - p_{33}) \\
&= \frac{5}{1296}
\end{aligned}$$

et

$$\mathbb{P}(S_2 \geqslant 4 | X_0 = 2) = p_{33}^3 = \frac{1}{216}$$

Exercice 7

1. D'après le cours, dans le cas d'une chaîne de Markov à 2 états, l'état stationnaire est $\pi = \begin{pmatrix} \frac{b}{a+b} & \frac{a}{a+b} \end{pmatrix}$. Ainsi, dans ce cas, le débit moyen est de $D \times \frac{b}{a+b}$.

2. On va noter T la variable aléatoire donnant le temps, à partir de 0, où la source est ON. Ainsi, (pour $n \geqslant 1$) : $[T = n] = (X_0 = 1) \cap (X_1 = 1) \cap \ldots \cap (X_{n-1} = 1) \cap (X_n = 0)$. Alors, puisque (X_n) est une chaîne de Markov :

$$\mathbb{P}(T = 0) = \beta \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(T = n) = \beta \times b^{n-1} \times a$$

Alors, la longueur moyenne du message envoyé est l'espérance de T fois D bits. Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{n=0}^{\infty} n\mathbb{P}(T = n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} n\beta b^{n-1} a \\
&= \beta a \frac{1}{(1-b)^2} = \frac{\beta}{a}
\end{aligned}$$

La longueur moyenne est donc $\frac{\beta}{a}$D bits.

3. On cherche, en utilisant la définition précédente, $\mathbb{P}(T > 100)$. Ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T > 100) &= \sum_{n=101}^{\infty} \mathbb{P}(T = n) \\
&= \sum_{n=101}^{\infty} \beta b^{n-1} a \\
&= \beta a \frac{b^{100}}{1-b} = \beta b^{100}
\end{aligned}$$

Ainsi, la probabilité que le message dépasse cette capacité est de βb^{100}.

Exercice 8

1. Le choix à l'instant n ne dépend que de la somme dont il dispose à l'instant $n-1$: 0, il arrête, N il arrête et sinon il rejoue. Elle est homogène puisque ses conditions ne dépendent que de 0 et N. Son graphe de transition :
2. 0 et N sont absorbants : dès qu'on y arrive, le joueur s'arrête de jouer. Ils sont donc récurrents. Toujours les autres états sont de fait transitoire par construction.
3. Rappelons les équations des probabilités atteinte :

$$\forall\ i, j, \quad f_{ij} = p_{ij} + \sum_{k \neq j} p_{ik} f_{kj}$$

et des probabilités d'absorption :

$$\forall\ i, j \notin \{0, N\}, \quad f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k \notin \{0,N\}} p_{i,k} f_{kj}$$

4. Ici, r_i représente la probabilité, partant avec une mise i, de se retrouver ruiner : c'est la probabilité de ruine du joueur.
5. Rapidement $r_0 = 1$ (si on est ruiné, on est sûr de le rster) et $r_N = 0$ (car le joueur s'arrête avec sa somme N).
6. On utilise les équations vues précédemment :

$$\forall\ i \in [\![1; N-1]\!], \quad f_{i0} = p_{i0} + \sum_{k \in [\![1;N-1]\!], k \neq i} p_{ik} f_{k0}$$

Or, par construction, $p_{ik} = q$ si $k = i+1$, $1-p$ si $k = i-1$ et 0 sinon. Donc

$$\forall\ i \in [\![1;\mathrm{N}-1]\!],\quad f_{i0} = p_{i0} + pf_{(i+1)0} + (1-p)f_{(i-1)0}$$

Si $i > 1$, on a $p_{i0} = 0$ et on obtient le résultat attendu. Si $i = 1$, on a alors $f_{i0} = p_{i0} + pr_{i+1} = q + pr_{i+1} = qr_0 + pr_{i+1}$.

7. La suite est récurrente linéaire d'ordre 2. L'équation caractéristique est $\mathrm{X} = q + p\mathrm{X}^2$ soit $p\mathrm{X}^1 - \mathrm{X} + q$, de discriminant $\Delta = 1 - 4pq = (2p-1)^2$. Si $p \neq \frac{1}{2}$, les racines sont donc

$$x_1 = \frac{1-(2p-1)}{2p} = \frac{2(1-p)}{2p} = \frac{q}{p} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+(2p-1)}{2p} = 1$$

et la suite (r_i) s'écrit alors

$$r_i = \alpha 1^i + \beta\left(\frac{q}{p}\right)^i$$

Si $p = \frac{1}{2}$, il y a une racine double qui est 1 et alors (r_i) s'écrit

$$r_i = \alpha + \beta i$$

8. On utilise $r_0 = 1$ et $r_\mathrm{N} = 0$. Dans le cas $p \neq \frac{1}{2}$, on obtient après calcul :

$$\forall\ i \in [\![0;\mathrm{N}]\!],\quad r_i = -\frac{\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}} + \frac{1}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}}\left(\frac{q}{p}\right)^i = \frac{-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N} + \left(\frac{q}{p}\right)^i}{1-\left(\frac{q}{p}\right)^\mathrm{N}}$$

Si $p = \frac{1}{2}$, on a alors

$$\forall\ i \in [\![0;\mathrm{N}]\!],\quad 1 - \frac{i}{\mathrm{N}}$$