# TD File d'attente

ENSSAT

---

## Exercice 2

1. On nous donne $\rho = 0,95$ et $\lambda = \frac{1}{10}$. Ainsi, $\frac{\lambda}{\mu} = 0,95$ soit $\mu = \frac{1}{9,5}$. Ainsi, la durée moyenne est de

$$\overline{\mu} = \frac{1}{\mu} = 9,5 \text{ mn}$$

2. Puisque $\rho < 1$, la distribution stationnaire existe. On a alors $\pi_j = \rho\pi_{j-1}$ et donc $\pi_j = \rho^j\pi_0$, avec $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j = 1$ ce qui nous donne

$$\pi_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{\infty} \rho^j} = 1 - \rho$$

et donc

$$\pi = (\pi_j) \text{ avec } \pi_j = (1-\rho)\rho^j$$

3. Par définition :

$$\begin{aligned}
\overline{N} &= \sum_{j=0}^{\infty} j\mathbb{P}(N = j) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} j\pi_j \\
&= (1-\rho)\sum_{j=0}^{\infty} j\rho^j \\
&= (1-\rho)\rho\frac{1}{(1-\rho)^2} \\
&= \frac{\rho}{1-\rho} = 19
\end{aligned}$$

Il y a en moyenne 19 clients en attente.
De même, le temps de séjour moyen vaut $\overline{R}$. Comme il y a ergodicité, on va appliquer la formule de Little. Il nous faut $\overline{\lambda}$ :

$$\overline{\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda\pi_j = \lambda$$

et donc $\overline{R} = \frac{\overline{N}}{\overline{\lambda}} = \frac{\frac{\rho}{1-\rho}}{\lambda} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 190$ mn.
Enfin, le temps d'attente moyen vaut $\overline{R_q} = \overline{R} - \frac{1}{\mu} = 180,5$ minutes.

4. Avec un taux d'activité du serveur de $0,95$ (soit proche de 1), le temps d'attente moyen est de 2 h, ce qui est non négligeable.

5. Les résultats théoriques sont les mêmes. On obtient alors

$$\overline{N} = 9, \quad \overline{R} = 90 \text{ mn} \quad \text{et} \quad \overline{R_q} = 81 \text{ mn}$$

On diminue ainsi drastiquement les temps d'attente en obtenant un taux d'activité de $0,9$ au lieu de $0,95$.

## Exercice 4

1. On dispose d'une file M/M/n ici. Les lois des temps d'inter-arrivés et de service sont sans mémoire, donc la chaîne est Markovienne.
   On dispose du graphe suivant, en négligeant les cas qui sont $o(t)$ :

2. En utilisant les équations de balance, on obtient, pour $j \geqslant 1$ :

$$\begin{aligned}\pi_j &= \pi_0 \prod_{k=1}^{j} \frac{\lambda(k-1)}{\mu(k)} \\ &= \pi_0 \lambda^j \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{\mu(k)}\end{aligned}$$

   — Si $j \leqslant n$ :

$$\pi_j = \pi_0 \lambda^j \prod_{k=1}^{j} \frac{1}{k\mu} = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}$$

   — Si $j \geqslant n+1$ :

$$\begin{aligned}\pi_j &= \pi_0 \lambda^j \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{k\mu} \prod_{k=n+1}^{j} \frac{1}{n\mu} \\ &= \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{n! n^{j-n}}\end{aligned}$$

   En notant $\rho = \frac{\lambda}{n\mu}$ :

$$\pi_j = \pi_0 \begin{cases} \frac{\rho^j}{j!} n^j & \text{pour } 1 \leqslant j \leqslant n \\ \frac{\rho^j}{n!} n^n & \text{pour } j \geqslant n+1 \end{cases}$$

   On remarque que pour $j = n$, les formules se recollent, et que pour $n = 1$, on retrouve bien la formule classique de la file M/M/1.
   Le régime stationnaire existe si et seulement si la série de terme général $\pi_j$ converge, donc si et seulement si $\rho < 1$. Dans ce cas, par calcul classique (la somme de la série valant 1) :

$$\pi_0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{n} \frac{(n\rho)^j}{j!} + \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(n\rho)^j}{n!} n^{n-j}\right)^{-1}$$

3. On note $N_q$ la variable aléatoire commentant le nombre de clients dans la zone d'attente en régime stationnaire. Par définition :

   — Si $N_\infty \leqslant n$, alors $N_q = 0$ (pas d'attente car tous les serveur ne sont pas occupé)

   — Si $N_\infty \geqslant n+1$, alors $N_q = N_\infty - n$, c'est-à-dire le nombre de client moins le nombre de clients dans les serveurs.

Alors, par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N_q) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N_q = k)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(N = n + k)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{n+k}\\
&= \pi_0 \frac{n^n}{n!} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k+n}\\
&= \pi_0 \frac{n^n}{n!} \rho^{n+1} \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \pi_0 \frac{(n\rho)^n}{n!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{N_q} = \mathbb{E}(N_Q)$ (par ergodicité) et donc

$$\overline{N_q} = \pi_0 \frac{(n\rho)^n}{n!} \frac{\rho}{(1-\rho)^2}$$

4. De même, par ergodicité, $\overline{N} = \mathbb{E}(N)$ et par définition :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(N_\infty = k)\\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_k\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\pi_k + \sum_{k=n+1}^{\infty} k\pi_k
\end{aligned}$$

or :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=n+1}^{\infty} k\pi_k &= \sum_{k=1}^{\infty} (n+k)\pi_{n+k}\\
&= n\sum_{k=1}^{\infty} \pi_{n+k} + \sum_{k=1}^{\infty} k\pi_{n+k}\\
&= n\sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k + \mathbb{E}(N_q)
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(N) &= \mathbb{E}(N_q) + \sum_{k=1}^{n} k\pi_k + n\sum_{k=n+1}^{\infty} \pi_k\\
&= \mathbb{E}(N_q) + n\rho\pi_0 \left( \sum_{k=1}^{n} k\frac{(n\rho)^{k-1}}{k!} + \frac{1}{\rho} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^n\rho^k}{n!} \right)\\
&= \mathbb{E}(N_Q) + n\rho\pi_0 \left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{n^{n-1}\rho^{k-1}}{(n-1)!} \right)\\
&= \mathbb{E}(N_Q) + n\rho\pi_0 \underbrace{\left( \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n\rho)^k}{k!} + \sum_{k=n}^{\infty} \frac{n^n\rho^k}{(n)!} \right)}_{=\pi_0^{-1}} = \mathbb{E}(N_q) + n\rho
\end{aligned}$$