TD Chaînes de Markov à temps discret

ENSSAT

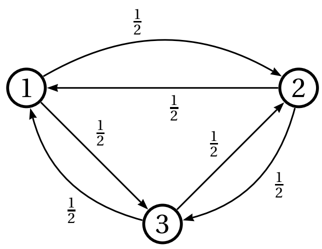
Exercice 9

1. Cours : on démontre d'abord que $p(n+1) = p(n)\mathrm{P}$ (pour $n \geqslant 1$) par conditionnement par rapport à $([\mathrm{X}_n = k])_{k\in\mathrm{E}}$, puis on conclut par une récurrence rapide que $p(n) = p(1)\mathrm{P}^{n-1}$.

2. (a) Par construction, $p_{ii} = 0$ et pour $j \neq i$, $p_{ij} = \frac{1}{k-1}$. La matrice s'écrit donc

$$\mathrm{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{k-1} & \cdots & \frac{1}{k-1} \\ \frac{1}{k-1} & 0 & \cdots & \frac{1}{k-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{1}{k-1} & \frac{1}{k-1} & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Pour $k = 3$, cela donne le graphe :



(b) On prend $k = 4$ et on souhaite calculer $\mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_1 = 2)$. On utilise les propriétés des chaînes de Markov :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_1 = 2) &= \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_2 = 1, \mathrm{X}_1 = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_2 = 2, \mathrm{X}_1 = 2) + \mathbb{P}(\mathrm{X}_3 = 2|\mathrm{X}_2 = 3, \mathrm{X}_1 = 2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\end{aligned}$$

On peut aussi calculer $p(3) = p(1)\mathrm{P}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}^2$. Après calcul, $p(3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ et on obtient le même résultat.

(c) Dans le cas général, tout état est récurrent : la chaîne est irréductible. De plus, tout état est apériodique (en effet, par exemple, on peut revenir en 2 en 2 et 3 étapes. Le PGCD sera alors 1). La chaîne est donc irréductible, finie et apériodique : d'après le théorème ergodique principal, la chaîne admet une distribution limite ne dépendant pas de l'état initial, et $(p(n))$ converge donc vers π, indépendante de $p(1)$.
Dans le contexte de l'exercice, π représente la distribution "moyenne" des pages : plus π_i est grand, plus la page a des chances d'être consultée. Ici, puisqu'il y a équiprobabilité d'aller d'une page à une autre, on peut supposer que $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{k} & \cdots & \frac{1}{k} \end{pmatrix}$. En calculant $\pi\mathrm{P}$, on obtient bien π.

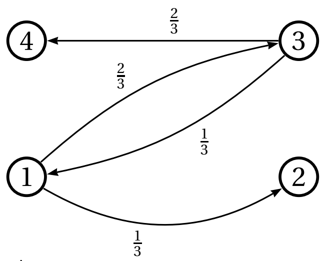
(d) Une des possibilités : calculer $p(n)$ pour de grandes valeurs de n (informatiquement) pour obtenir une valeur approchée assez bonne de la distribution limite.

3. (a) Le numéro d'une telle page représente un état absorbant : arrivé à cette page, on ne peut plus en sortir.

(b) On utilisant l'énoncé :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le graphe :



Par définition

$$\begin{aligned} f_{1,2} &= \mathbb{P}(\exists\, n \in \mathbb{N}^*, X_n = 2 | X_1 = 1) \\ &= \sum_{n\geqslant 1} \mathbb{P}(X_n = 2 | X_1 = 1) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \mathbb{P}_1(X_2 = 3, X_3 = 1, \cdots, X_{2n-1} = 1, X_{2n} = 2) \\ &= \sum_{n\geqslant 0} \left(\frac{2}{3}\frac{1}{3}\right)^n \frac{1}{3} \text{ par propriété des chaînes de Markov} \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{2}{9}} = \frac{3}{7} \end{aligned}$$

Par le même raisonnement,

$$f_{1,4} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\frac{2}{3}\right)^n \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$$