ATS

Jeudi 11 mai 2017

La présentation, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies. Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*

L'usage de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdit.

Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ muni de sa base orthonormée canonique $\mathscr{B}$.
Soient p l'application $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ définie par : $p((x,y,z,t)) = \left(\frac{x}{2}+\frac{z}{2}, y, \frac{x}{2}+\frac{z}{2}, t\right)$, et l'endomorphisme s de $\mathbb{R}^4$ ayant dans la base $\mathscr{B}$ la matrice :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que p est une application linéaire.
   (b) Donner la matrice P de p dans la base canonique $\mathscr{B}$.
   (c) Montrer sans calcul que P est diagonalisable.
2. Dans cette question, nous étudions la matrice S et l'endomorphisme s.
   (a) Calculer S^2.
   (b) Montrer sans calcul que S est diagonalisable.
   (c) Déterminer le polynôme caractéristique de S sous une forme factorisée. Montrer que S admet deux valeurs propres distinctes λ_1 et λ_2 à préciser avec $\lambda_1 < \lambda_2$.
   (d) Donner la multiplicité des valeurs propres λ_1 et λ_2.
   (e) Exprimer le vecteur propre u_1 de s associé à la valeur propre λ_1 dont la première composante dans la base $\mathscr{B}$ est -1.
   (f) Donner trois vecteurs propres u_2, u_3 et u_4 (linéairement indépendants) de s pour la valeur propre λ_2. On les choisira avec des composantes égales à 1 ou 0.
   (g) Donner une matrice U inversible et une matrice diagonale D telles que $S = UDU^{-1}$. On ne demande pas de calculer U^{-1}.
   (h) Calculer S^{2017}.
3. Dans cette partie, nous caractérisons les espaces $F = \text{Vect}(u_1)$ et $G = \text{Vect}(u_2, u_3, u_4)$.
   (a) Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Montrer que si $v \in F$ et $w \in G$ alors v et w sont orthogonaux pour le produit scalaire canonique.
   (c) Montrer que $F \oplus G = \mathbb{R}^4$.

4. Dans cette partie, nous cherchons à caractériser l'application linéaire p.
   (a) Calculer p^2 ($p^2 = p \circ p$).
   (b) Calculer $p(u_1)$, $p(u_2)$, $p(u_3)$ et $p(u_4)$.
   (c) Déterminer les valeurs propres et une base de $\mathbb{R}^4$ formée de vecteurs propres de p.
   (d) Donner une matrice inversible V et une matrice diagonale Δ telles que $P = V\Delta V^{-1}$.
   On ne demande pas de calculer V^{-1}.
   (e) Caractériser géométriquement l'application linéaire p.

Exercice 2

Soit c un nombre réel non nul. On considère les fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, toutes deux 2π-périodiques et définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$\forall\ t \in [-\pi, \pi[, \quad f(t) = e^{ct} \quad \text{et} \quad g(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2} = \operatorname{ch}(ct).$$

1. Dans cette question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement la fonction f sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$. On précisera sur cette figure les valeurs de f aux points de discontinuité. On donne $e^{-\pi} \approx 0,04$ et $e^{\pi} \approx 23,14$.
2. On note

$$Sf(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nt) \quad \text{et} \quad Sg(t) = a'_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a'_n \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} b'_n \sin(nt)$$

   les séries de Fourier respectives de f et g.
   (a) Calculer le coefficient a_0.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$a_n = \frac{2(-1)^n c \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)}$$

   Indication : on pourra utiliser $\cos(nt) = \Re(e^{int})$. On rappelle que $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$b_n = \frac{2(-1)^{n+1} n \operatorname{sh}(c\pi)}{\pi(c^2 + n^2)}$$

3. (a) Quelle est la parité de g ?
   (b) g est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
   (c) Montrer que la série de Fourier de g est convergente. On énoncera le théorème utilisé et on précisera la fonction vers laquelle elle converge.
   (d) Déduire à l'aide des coefficients de Fourier a_n et b_n de f les coefficients de Fourier a'_n et b'_n de la fonction g.
4. (a) Dans cette sous-question seulement, on suppose $c = 1$. Représenter graphiquement g sur l'intervalle $[-2\pi, 2\pi]$.
   (b) Calculer $Sf(0) = Sg(0)$ et en déduire l'expression $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^2 + n^2}$.
   (c) Calculer $Sg(\pi)$ et en déduire l'expression $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c^2 + n^2}$.

5. En appliquant la relation de Parseval à g, calculer $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{c^2+n^2}\right)^2$.

Exercice 3

On considère la fonction g de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall\ (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8.$$

Dans un espace affine euclidien muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la surface S admettant pour équation cartésienne :

$$z = g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8.$$

Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1. Comparer $g(x, y)$ avdc $g(x, -y)$, $g(-x, y)$, $g(-x, -y)$. Déduire de chaque égalité trouvée une symétrie de la surface S.
2. On rappelle que $p(x, y) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y)$. Montrer que $p(x, y) = 4x(x^2 + y^2 - 3)$.
3. On rappelle que $q(x, y) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, y)$. Calculer $q(x, y)$.
4. Trouver tous les couples de réels solutions du système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 4x(x^2 + y^2 - 3) & = & 0 \\ 4y(x^2 + y^2 - 1) & = & 0 \end{array}\right.$$

5. En déduire que la fonction g admet cinq points critiques dont on précisera les coordonnées.
6. Énoncer un théorème permettant de démontrer que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}$. Montrer que la fonction g vérifie les hypothèses de ce théorème.
7. (a) On rappelle que $r(x, y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y)$. Montrer que $r(x, y) = 4(3x^2 + y^2 - 3)$.

   (b) On rappelle que $s(x, y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x, y)$. Calculer $s(x, y)$.

   (c) On rappelle que $t(x, y) = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$. Calculer $t(x, y)$.
8. Calculer r et $rt - s^2$ pour (x, y) vérifiant $(0, 0), (0, \pm 1), (\pm\sqrt{3}, 0)$. En déduire la nature des points critiques (maximum, minimum ou col) trouvés à la question 5.

Partie B

On se propose de déterminer deux réels positifs α et r tels que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$g(x, y) = (x^2 + y^2 - 3)^2 + 4y^2 - 8 = ((x - \alpha)^2 + y^2 - r^2)((x + \alpha)^2 + y^2 - r^2) \quad (*).$$

1. Écrire l'égalité $(*)$ avec $(x, y) = (0, 1)$. En déduire la valeur de $\alpha^2 + 1 - r^2$, s'il existe α et r tels que $(*)$ soit vraie.
2. Écrire l'égalité $(*)$ avec $(x, y) = (1, 0)$. En déduire en utilisant aussi le résultat de la question 1. de cette partie la valeur des réels positifs α et r, s'il existe α et r tels que l'égalité $(*)$ soit vraie.

3. Pour les valeurs α et r trouvées dans les cas particuliers $(0,1)$ et $(1,0)$, montrer que l'égalité $(*)$ est vraie pour tout couple de réels (x, y).
4. En déduire que l'ensemble de points vérifiant l'équation $g(x, y) = 0$ est formé de deux cercles dont on donnera les centres, les rayons et les coordonnées des points d'intersection.

Exercice 4

On se donne un tableau à une dimension, de longueur n dont les entrées sont indexéees de 1 à n, ne contenant que des 0 et des 1, commençant et se terminant par un 0. On suppose qu'il ne contient pas que des 0.

Dans un tel tableau on appelle **séquence1** une suite de 1 consécutifs précédés et suivis d'au moins un 0. Ci-dessous, on a un exemple d'un tel tableau de longueur 16, comportant 4 **séquence1**, dont une de longueur 4 entre les numéros 8 et 11, et une en 15 de longueur 1. On se propose d'écrire des fonctions en métalangage ou en Scilab permettant de calculer le nombre, la longueur et la position de telles **séquence1**.

Index i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Tableau1(i)	0	0	1	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0

1. Soit la fonction `f` écrite en Scilab, avec en entrée un tableau `t` défini précédemment.

   Programme Scilab 1

   ```
   function nb=f(t)
       nb=0
       n=length(t)
       for i=1:(n-1)
           if t(i)<t(i+1)
               nb=nb+1
           end
       end
   endfunction
   ```

   Expliquer ce que renvoie `f(Tableau1)` et préciser le fonctionnement de `f`.
2. Écrire en métalangage ou en Scilab une fonction g qui détermine et renvoie la position et la longueur [début,fin,longeur] de la plus longue **séquence1** du tableau (en cas d'égalité de longueur celle de la première rencontrée). Par exemple, `g(Tableau1)` doit renvoyer la liste $[3, 6, 4]$.