Chapitre 1

# Raisonnement et vocabulaire ensembliste

*Ce chapitre introductif est très important. Il pose les bases nécessaires à l'ensemble de l'année :*
- *les principes de raisonnement (récurrence, contraposée, absurde) ;*
- *les notions liées aux ensembles ;*
- *les notions de bases sur les applications, qui feront l'objet de chapitres supplémentaires.*

*Même si ce chapitre est un peu abrupt, il faut régulièrement y revenir pour maitriser l'ensemble des éléments présents.*

**Objectifs**

*La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.*

① mener un raisonnement par récurrence ☐

② maitriser les raisonnements élémentaires :
- le raisonnement par contraposée ☐
- le raisonnement par l'absurde ☐
- la justification d'équivalence et d'implication ☐

③ connaitre les notions essentielles sur les ensembles :
- les ensembles élémentaires ☐
- l'union, l'intersection, le complémentaire ☐
- le produit cartésien ☐

④ connaître les notions importantes liées aux applications :
- les définitions d'injection, surjection, et bijection, ainsi que les méthodes ☐
- la définition d'image directe, d'image réciproque et de restriction ☐

# 1. Raisonnement par récurrence

## 1.1. Principe de récurrence

Le **raisonnement par récurrence** est un raisonnement important des mathématiques. Pour le comprendre, nous allons partir d'un exemple :

**Exemple 1.1**
On considère la proposition $P(n)$ dépendant d'un entier $n$ : " $2^n \geqslant n+1$ "
Vérifions que cette propriété est vraie pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ :
Pour $n = 0$ : $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$
Pour $n = 1$ : $2^1 = 2 \geqslant 1+1 = 2$
Pour $n = 2$ : $2^2 = 4 \geqslant 2+1 = 3$
Pour $n = 3$ : $2^3 = 8 \geqslant 3+1 = 4$
Pour $n = 4$ : $2^4 = 16 \geqslant 4+1 = 5$

On peut continuer les vérifications pour tous les entiers que l'on souhaite, mais on ne pourra jamais affirmer que la proposition est vraie **pour tout entier $n$**. Pour démontrer cette proposition, on va faire appel au **raisonnement par récurrence**.

**Axiome 1.1.**

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier, et $n_0$ un entier fixé.
- Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**),
- et si pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ (**hérédité**),

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n \geqslant n_0$.

**Démonstration**
Ceci est un **axiome des mathématiques** : c'est une propriété de base, qui ne se démontre pas, mais qui semble "logique".
L'idée est simple : si on peut poser la première brique d'un mur, et si à chaque fois qu'on a posé une brique, on peut en poser une autre par dessus, on peut effectivement construire un mur complet (infini, certes).

**Remarque**
Si, pour tout entier $n \geqslant n_0$, $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$, on dit que la propriété $P$ est **héréditaire**.

**Solution**
Démontrons maintenant la propriété $P(n)$: " $2^n \geqslant n+1$ " pour $n \geqslant 0$ par récurrence :

- **initialisation** : pour $n = 0$, on a bien $2^0 = 1 \geqslant 0+1 = 1$.
- **hérédité** : supposons que la propriété $P(n)$ soit vraie pour **un certain $n$** fixé. On a donc $2^n \geqslant n+1$ : c'est **l'hypothèse de récurrence**
  *On veut alors démontrer $P(n+1)$, c'est à dire $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$*

$$\begin{array}{llrcll} \text{Si } 2^n \geqslant n+1 & \text{alors} & 2\times 2^n & \geqslant & 2(n+1) & \text{car } 2 \geqslant 0 \\ & \text{puis} & 2^{n+1} & \geqslant & 2n+2 & \\ & \text{donc} & 2^{n+1}-(n+1+1) & \geqslant & 2n+2-(n+1+1) & \\ & \text{et enfin} & 2^{n+1}-(n+2) & \geqslant & n \geqslant 0 & \text{car } n \geqslant 0 \end{array}$$

On a donc bien $2^{n+1} \geqslant (n+1)+1$ : la proposition $P(n+1)$ est donc vérifiée, et $P$

est donc héréditaire.

On a bien démontrer l'initialisation et l'hérédité : on a donc démontré par récurrence que la propriété $P(n)$ est vraie **pour tout entier** $n$ :

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ 2^n \geqslant n+1$$

**Exercice 1.2**

Démontrer par récurrence les propriétés suivantes :

1. $\forall\ n \geqslant 1,\ 1+\ldots+n = \sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$
2. $\forall\ n \geqslant 1,\ 1^2+\ldots+n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

**Solution**

1. Soit $P_n$ la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par $P_n$ : "$1+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$".
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part la somme qui est réduite à un élément, 1, et d'autre part $\frac{1(1+1)}{2} = 1$. Donc $P_1$ est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition $P_n$ soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que $P_{n+1}$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+2+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
     Or, $1+2+\ldots+(n+1) = (1+2+\ldots n)+(n+1)$. D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1+\ldots+n+(n+1) = \frac{n(n+1)}{2}+(n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = (n+1)\frac{n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$
     Ainsi, la proposition $P_{n+1}$ est vraie, et la propriété $P$ est donc héréditaire.

   D'après le principe de récurrence, la proposition $P_n$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ :
   $$\forall\ n \geqslant 1,\quad 1+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$
2. Soit $Q_n$ la proposition définie pour tout $n \geqslant 1$ par $Q_n$ : "$1^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$".
   - Initialisation : pour $n=1$, on a d'une part $1^2 = 1$, et d'autre part $\frac{1(1+1)(2\times1+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$. Donc $Q_1$ est vraie.
   - Hérédité : supposons que la proposition $Q_n$ soit vraie pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons que $Q_{n+1}$ est vraie.
     Par hypothèse de récurrence, on a donc
     $$1^2+2^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
     Comme précédemment, on a alors
     $$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2 = (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right)$$

soit

$$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\frac{2n^2+n+6n+6}{6}=(n+1)\frac{2n^2+7n+6}{6}$$

Or, $(n+2)(2(n+1)+1)=(n+2)(2n+3)=2n^2+7n+6$. Donc,

$$1^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=(n+1)\frac{(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

Ainsi, la proposition $Q_{n+1}$ est vraie, et la propriété $Q$ est donc héréditaire. D'après le principe de récurrence, la proposition $Q_n$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ :

$$\forall\ n \geqslant 1,\quad 1^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**RÉFÉRENCE HISTORIQUE**

Même si des traces de principe de récurrence ont été trouvées dans les travaux de Pascal (XVIIe siècle), ce sont **Richard Dedekind** en 1888 et indépendamment **Giuseppe Peano** en 1889 qui énoncent le principe de récurrence tel qu'on le connait.

Le raisonnement par récurrence est également utile pour démontrer des résultats de divisibilité.

**Exemple 1.3**

Montrer par récurrence que, pour tout entier $n$, $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11.

**Solution**

Soit $P(n)$ la proposition " $10^n-(-1)^n$ est un multiple de 11 "

- **initialisation** : pour $n=0$, $10^0-(-1)^0=0=0\times 11$.
- **hérédité** : supposons $P(n)$ vraie pour **un certain** $n$. On peut donc écrire $10^n-(-1)^n = 11\times p$ où $p$ est un nombre entier. On a alors

$$\begin{array}{rcl}
10^n & = & 11\times p+(-1)^n \\
10\times 10^n & = & 10\times 11\times p+10\times(-1)^n \\
10^{n+1} & = & 110p+10.(-1)^n \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 110p+10.(-1)^n-(-1)^{n+1} \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times 10p+(-1)^n\,[10-(-1)] \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times 10p+(-1)^n\times 11 \\
10^{n+1}-(-1)^{n+1} & = & 11\times\left[10p+(-1)^n\right]
\end{array}$$

Donc $10^{n+1}-(-1)^{n+1}$ est bien un multiple de 11 : $P(n+1)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, on a donc bien démontré $P(n)$ pour tout $n$.

## 1.2. Récurrence double, récurrence forte

Dans certains cas, la récurrence précédente ne peut être utilisée, car on a besoin de plus d'informations. On peut utiliser alors un des deux principes suivants :

**Axiome 1.2. Principe de récurrence double**

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier $n$.

- Si $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.

$\cdots$

- et si, pour tout entier naturel $n$, $(P(n) \text{ et } P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$.

**Axiome 1.3. Principe de récurrence forte**

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'un entier $n$.

- Si $P(0)$ est vraie.
- et si, pour tout entier naturel $n$, $(P(0), P(1), \ldots, P(n)) \Longrightarrow P(n+1)$

alors $P(n)$ est vraie pour tout entier $n$.

**Remarque**

On utilisera souvent la récurrence double lorsqu'une relation fait intervenir à la fois $n$, $n+1$ et $n+2$.

**Exemple 1.4**

Soit $u$ la suite définie par $u_0 = 2$, $u_1 = 3$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, $u_n = 1 + 2^n$.

**Solution**

Soit $P$ la proposition définie pour tout entier $n$ par $P(n)$ : "$u_n = 1 + 2^n$".

- **initialisation** : pour $n = 0$ on a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et pour $n = 1$ on a $u_1 = 3 = 1 + 2^1$. Ainsi $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.
- **hérédité** : supposons que les propositions $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies pour un certain entier $n$ fixé. Par hypothèse de récurrence, on a donc que $u_n = 1+2^n$ et $u_{n+1} = 1+2^{n+1}$. Alors, par définition de $u$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= 3u_{n+1} - 2u_n \\ &\underbrace{=}_{\text{H.R.}} 3(1+2^{n+1}) - 2(1+2^n) \\ &= 3 + 3.2^{n+1} - 2 - 2.2^n = 1 + 3.2^{n+1} - 2^{n+1} = 1 + 2.2^{n+1} = 1 + 2^{n+2} \end{aligned}$$

  Ainsi, $P(n+2)$ est vraie.

D'après le principe de récurrence, la proposition $P_n$ est donc vraie pour tout entier $n \geqslant 1$ :

## 2. Raisonnement

### 2.1. Symboles mathématiques

Nous utiliserons très souvent plusieurs symboles mathématiques. Ils ne doivent être utilisés **que dans des phrases mathématiques**! Ce ne sont pas des abréviations.

- $\forall$ signifie "pour tout" ou "quel que soit".
- $\exists$ signifie "il existe".
- $\exists!$ signifie "il existe un unique".

On utilise / , | ou simplement "," pour signifier "tel que".

**Exemple 1.5**

$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists! y \in \mathbb{R}, y = x + 1$ signifie : "pour tout réel $x$, il existe un unique réel $y$ tel que $y = x + 1$".

**Exercice 1.6**
Traduire les phrases mathématiques suivantes :
- $\forall\ x \geqslant 0,\ \exists! y \geqslant 0, y^2 = x$
- $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2+1 = x^2+x$

**Solution**

- La première se traduit par "pour tout réel $x$ positif, il existe un unique $y$ positif tel que $y^2 = x$". Ainsi, cette phrase traduit l'existence de $\sqrt{x}$ pour tout réel $x$ positif.
- La deuxième se traduit par "il existe un réel $x$ tel que $x^2+1 = x^2+x$". Elle traduit donc l'existence d'une solution à l'équation $x^2+1 = x^2+x$.

## 2.2. Négation

**Définition 1.4.**

La négation d'une proposition $P$ est la proposition qui est vraie quand $P$ est fausse, et qui est fausse quand $P$ est vraie. On la note $\overline{P}$

**Exemple 1.7**
La négation de la proposition $x \geqslant 1$ est $x < 1$.

**Proposition 1.1.**

Lorsqu'on nie une proposition (on écrit sa **négation**), on échange quantificateur universel et quantificateur existentiel.

**Remarque**
La négation de $\forall\ x \in \mathbb{R}, \cdots$ est donc $\exists\ x \in \mathbb{R}, \cdots$. Ainsi, pour réfuter une proposition universelle, il suffit d'exhiber un **contre-exemple**.

**Exercice 1.8**
Déterminer la négation de la proposition : $\exists\ m \in \mathbb{R},\ \forall\ x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant m$.

**Solution**
La négation est : $\forall\ m \in \mathbb{R},\ \exists\ x \in \mathbb{R},\ f(x) < m$.

## 2.3. Implication et équivalence

Nous disposons aussi de certains connecteurs logiques :
- $\Longleftrightarrow$ : c'est l'équivalence, le "si et seulement si".
- $\Leftarrow$ et $\Rightarrow$ : les implications.

**Remarque**
Lorsque l'on a $A \Rightarrow B$, on dit que $B$ est la condition nécessaire, et $A$ la condition suffisante.
En effet, il **suffit** d'avoir $A$ pour avoir $B$, et il est **nécessaire** d'avoir $B$ si on a $A$.
Lorsqu'on a $A \Longleftrightarrow B$, $A$ et $B$ sont des conditions nécessaires et suffisantes.

**Définition 1.5.**

Si $A \Rightarrow B$ (sens direct), alors sa **réciproque** est $B \Rightarrow A$.
Si on a à la fois le sens direct et sa réciproque, on a alors l'équivalence.

**Remarque**
Ainsi, pour démontrer que certains résultats sont équivalents, on raisonnera par double inclusion : on démontrera tout d'abord que $A \Rightarrow B$, puis que $B \Rightarrow A$ pour conclure que $A$ et $B$ sont équivalentes.

## 2.4. Raisonnement direct, par contraposée, et par l'absurde

**Définition 1.6.**

Si $A$ est une proposition, on note non $A$, ou $\overline{A}$ sa négation.

**Exemple 1.9**
Si $A$ est la proposition $\forall\ x, x > 0$, alors sa négation est $\overline{A} : \exists\ x, x \leqslant 0$.

**Théorème 1.2.**

On a l'équivalence entre $A \Rightarrow B$ (raisonnement direct) et $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ (raisonnement par contraposée).
Pour démontrer un résultat du type $A \Rightarrow B$, il est souvent plus commode d'utiliser un raisonnement par contraposée : on suppose que l'on a $\overline{B}$ et on démontre qu'alors on a $\overline{A}$.

**Exemple 1.10**
Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

**Solution**
Un raisonnement direct est compliqué à faire rigoureusement. En revanche, la contraposée de $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ est $x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$, qui est vrai. Donc on a bien $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$

**Remarque**
On peut enfin utiliser un raisonnement par l'absurde : si on veut montrer $A \Rightarrow B$, on suppose que l'on a $A$ et $\overline{B}$ en même temps, et on essaie d'aboutir à une contradiction.

**Exercice 1.11**
Démontrer que $x \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 0$ par l'absurde.

**Solution**
Par l'absurde, on suppose que $x \neq 0$ et que $x^2 = 0$. Mais alors, si $x^2 = 0$, $x = 0$. Or $x \neq 0$ : c'est absurde ! Ainsi, notre hypothèse de départ est fausse, et $x^2 \neq 0$.

## 2.5. Égalité

***Méthode***

Pour démontrer une égalité :

① on introduit les variables nécessaires avec les mots “soit”, ou “pour tout”.

② en partant d’un des deux membres, on aboutit à l’autre membre par des égalités successives.

③ on conclut.

**Exemple 1.12**

Montrer que pour tous réels $a$ et $b$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

**Solution**

Soient $a$ et $b$ deux réels. Alors, en développant le membre de droite :

$$\begin{aligned}(a-b)(a^2+ab+b^2) &= a(a^2+ab+b^2) - b(a^2+ab+b^2)\\ &= a^3 + \cancel{a^2b} + \cancel{ab^2} - \cancel{ba^2} - \cancel{ab^2} - b^3\\ &= a^3 - b^3\end{aligned}$$

Ainsi, pour tous réels $a$ et $b$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$.

## 2.6. Équation et inéquation

Lorsqu’on résout une équation ou une inéquation, il est important de raisonner par équivalence. Si on raisonne par implication, il est **nécessaire** de vérifier les résultats obtenus.

Pour résoudre une équation, on peut :

- partir de l’équation qu’on modifie (par équivalence) pour aboutir au résultat ;
- regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise ;
- ou enfin, on regroupe tous les termes dans un même membre, et on étudie une fonction.

**Exemple 1.13**

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l’équation $\ln(x) = x - 1$.

**Solution**

L’équation s’écrit également $\ln(x) - x + 1 = 0$. Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x + 1$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est

$$\forall\ x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

On obtient ainsi le tableau de signe et variations suivant :

| $x$ | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\Vert$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | $\Vert$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | |

Ainsi, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution : $x=1$.

***Méthode***
Pour résoudre une inéquation :

① on introduit les variables nécessaires avec les mots "soit", ou "pour tout".

② on part de l'équation ou l'inéquation, et on résout en appliquant différentes propriétés par équivalence

③ ou alors on regroupe tous les termes dans un même membre, et on factorise, pour dresser un tableau de signe.

④ on conclut.

**Rappel**
Les propriétés suivantes n'ont pas à être justifiées.

- On ne modifie pas une équation en ajoutant un même nombre, en multipliant ou divisant par un même nombre *non nul*, en simplifiant ou en appliquant une fonction strictement monotone.
- Ajouter un terme à une inégalité ne change pas le sens de celle-ci, de même que multiplier l'inégalité par un même nombre positif. En revanche, multiplier par un nombre négatif une inégalité change le sens de celle-ci.

Quand on résout une inéquation, on justifiera **toutes** les étapes non triviales, par exemple en utilisant les variations d'une fonction.

**Exemple 1.14**
Résoudre l'inéquation $3x-3<1-2x$.

**Solution**
On raisonne par équivalence :

$$\begin{aligned} 3x-3<1-2x &\iff 5x-3<1 \\ &\iff 5x<4 \\ &\iff x<\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathscr{S}=\left]-\infty;\frac{4}{5}\right[$.

**Remarque**
On peut utiliser des mots en français ("c'est-à-dire", "si et seulement si") pour remplacer le symbole $\iff$, mais aussi pour l'implication ("donc", "puis", "soit").

## 3. Ensembles

### 3.1. Ensembles et éléments

**Définition 1.7.**

On appelle **ensemble** toute *collection* d'objets, appelés **éléments** de cet ensemble.
Pour signifier que l'élément $x$ appartient à un ensemble $E$, on note $x \in E$. Si $x$ n'appartient pas à $E$, on écrit $x \notin E$.

**Exemple 1.15**

$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles usuels. On a $\sqrt{2} \in \mathbb{R}$, mais $\sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$.
$\{x_1, \dots, x_n\}$ est l'ensemble constitué uniquement de $x_1, \dots x_n$.

**Définition 1.8.**

L'ensemble constitué d'aucun élément est appelé **ensemble vide**, et est noté $\varnothing$.

**Attention**

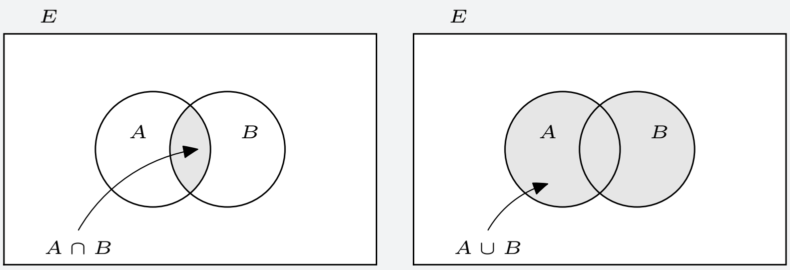
On note $\varnothing$ et non $\{\varnothing\}$.

## 3.2. Union, intersection

**Définition 1.9.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles.

- On appelle **intersection** de $E$ et de $F$, noté $E \cap F$, l'ensemble constitué des éléments qui sont à la fois dans $E$ et dans $F$.
- On appelle **réunion** (ou **union**) de $E$ et de $F$, noté $E \cup F$, l'ensemble constitué des éléments qui sont dans $E$ ou dans $F$ (voire dans les deux).




**Exemple 1.16**

Si $A = \{1; 2; 4\}$ et $B = \{2; 4; 5\}$ alors

$$A \cup B = \{1; 2; 4; 5\} \quad \text{et} \quad A \cap B = \{2; 4\}$$

## 3.3. Inclusion, sous-ensemble

**Définition 1.10.**

Soit $E$ un ensemble. On dit que $F$ est **inclus** dans $E$, et on note $F \subset E$, si tous les éléments de $F$ sont aussi des éléments de $E$. On dit alors que $F$ est une **partie** (ou un **sous-ensemble**) de $E$.

**Exemple 1.17**

$\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, $\{0, 1\} \subset \{0, 1, 2\}$.

**Définition 1.11.**

Soit $E$ un ensemble. On appelle **ensemble des parties** de $E$, et on note $\mathscr{P}(E)$, l'ensemble formé des sous-ensembles de $E$.

**Exemple 1.18**

On a $\mathscr{P}(\{a,b\}) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

**Exercice 1.19**

Déterminer $\mathscr{P}(\{a,b,c\})$.

**Solution**

Si $E = \{a,b,c\}$, alors

$$\mathscr{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$$

**Théorème 1.3.**

Soit $E$ un ensemble possédant $n$ éléments (avec $n \geqslant 1$). Alors $\mathscr{P}(E)$ possède $2^n$ éléments.

**Démonstration**

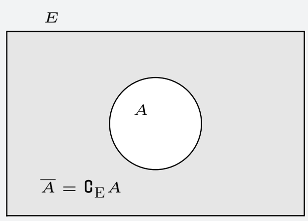
Pour construire un sous-ensemble de $E$, il faut prendre certains éléments de $E$ et pas d'autres. Si on note $x_1; \ldots; x_n$ les éléments de $E$, alors pour chaque élément $x_k$, on peut soit le prendre, soit ne pas le prendre ; il y a donc 2 possibilités pour chaque élément. Puisqu'il y a $n$ éléments, et que le choix se fait de manière indépendante, il y a donc

$$\underbrace{2 \times \ldots \times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n \text{ sous-parties}$$

## 3.4. Complémentaire

**Définition 1.12.**

Soit $E$ un ensemble et $A$ un sous-ensemble de $E$. On appelle **complémentaire** de $A$, et on note $\overline{A}$, l'ensemble des éléments de $E$ qui ne sont pas dans $A$ : $\overline{A} = E \backslash A$.




**Exemple 1.20**

Si $E = \{1;2;3;4;5\}$ et $A = \{1;2;4\}$ alors $\overline{A} = \{3;5\}$.

**Théorème 1.4. Lois de de Morgan**

Soit $E$ un ensemble, et soient $A, B$ deux sous-ensembles de $E$.

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

***Méthode***

Pour montrer une égalité entre deux ensembles, on utilise la **double inclusion** : si $C \subset D$ et $D \subset C$ alors nécessairement $C = D$.

**Démonstration**

- Soit $x \in \overline{A \cup B}$. Cela veut dire qu'il n'est pas dans $A \cup B$. Donc il n'est ni dans $A$, ni dans $B$ : il est donc dans $\overline{A} \cap \overline{B}$.
- Soit $\in \overline{A} \cap \overline{B}$. Il n'est donc pas dans $A$, et il n'est pas dans $B$ : il n'est donc pas dans $A \cup B$. Ainsi, $x \in \overline{A \cup B}$.

L'autre égalité se montre de la même manière.

### 3.5. Produit cartésien

**Définition 1.13.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle **produit cartésien** de $E$ et $F$, noté $E \times F$, l'ensemble formé des couples $(a, b)$ avec $a \in E$ et $b \in F$.

**Exemple 1.21**

Si $E = \{a, b\}$ et $F = \{-1, 1\}$ alors $E \times F = \{(a, -1), (a, 1), (b, -1), (b, 1)\}$.

**Remarque**

- Si $E = F$, on note en général $E \times E = E^2$.
- On peut généraliser à un produit fini d'ensemble $E_1 \times \ldots \times E_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} E_k$

**Exemple 1.22**

Les deux exemples classiques sont $\mathbb{R}^2 = \{(x, y), x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ et

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n), \quad x_1 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

Ainsi, par exemple, $(1; -4\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ et $(0; 0; 1) \in \mathbb{R}^3$.

## 4. Applications

### 4.1. Définition

**Définition 1.14.**

Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Une **application** (ou **fonction**) $f$ de $E$ vers $F$ est une transformation qui, à chaque élément $x$ de $E$, associe un unique élément $y$ de $F$. L'élément $y$ de $F$ est alors noté $f(x)$ et est appelé **image** de $x$ par $f$. $x$ est alors un **antécédent** de $y = f(x)$ par $f$.
L'ensemble $E$ est appelé **ensemble (ou domaine) de définition**.

**Notation**

On note $f : E \to F$ pour signifier que $f$ est une application de $E$ vers $F$.
L'ensemble des fonctions de $E$ vers $F$ est noté $\mathscr{F}(E, F)$.

**Exemple 1.23**

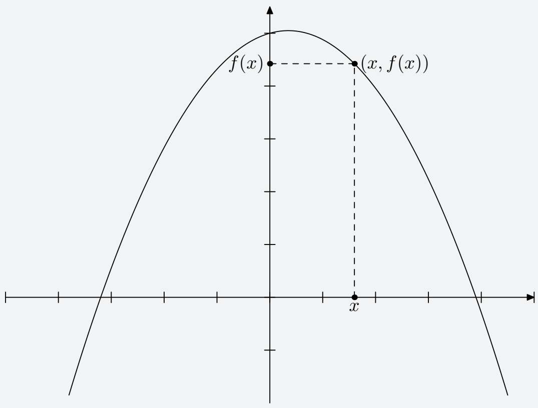
$\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & e^{-x^2}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,y) & \longmapsto & \frac{x+y}{1+x^2+y^2}\end{array}\right.$ sont des applications.

**Remarque**

Il y a, en réalité, une différence entre application et fonction. On peut parler généralement de la fonction logarithme népérien, sans indiquer qu'elle n'a pas de sens sur $\mathbb{R}^-$. En revanche, on parlera de l'application logarithme népérien définie sur $\mathbb{R}_*^+$. Dans la pratique, on utilisera quasi-systématiquement le mot fonction.

**Définition 1.15.**

L'ensemble des points du plan cartésien de coordonnées $(x, f(x))$ où $x$ est un élément du domaine de définition de $f$ est appelé **courbe représentative** de la fonction $f$.




**Remarque**

Si l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas indiqué, il est convenu que cet ensemble de définition est le **plus grand ensemble** sur lequel $f(x)$ existe.

**Exercice 1.24**

Déterminer le domaine de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2-4}$.

**Solution**

La fonction $f$ est définie si et seulement si $x^2-4 \geqslant 0$. Puisque $x^2-4=(x-2)(x+2)$, et après tableau de signe rapide, on obtient $\mathscr{D}_f = ]-\infty;-2] \cup [2;+\infty[$.

## 4.2. Opérations sur les fonctions

**Définition 1.16.**

Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur le <u>même ensemble</u> $E$. Soit $\lambda$ un réel.

- On appelle $f+g$ la fonction définie sur $E$ par $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$.
- On appelle $f \times g$ la fonction définie sur $E$ par $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$.
- On appelle $\lambda f$ la fonction définie sur $E$ par $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.
- On appelle $f+\lambda$ la fonction définie sur $E$ par $(f+\lambda)(x) = f(x)+\lambda$.
- Si $g$ **ne s'annule pas** sur $E$, on appelle $\frac{f}{g}$ la fonction définie sur $E$ par $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$.

**Exemple 1.25**
Soient $f$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ et $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x + 1$. Déterminer $f + g$ et $\frac{f}{g}$.

**Solution**
Par définition, $f + g$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $(f+g)(x) = x^2 + e^x + 1$ et $\frac{f}{g}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\frac{f}{g}(x) = \frac{x^2}{e^x+1}$.

**Définition 1.17.**

Soit $f$ une fonction définie sur $E$ et prenant ses valeurs dans $F$.
Soit $g$ une fonction définie sur $F$ et à valeur dans $G$.
La fonction qui, à tout réel $x$ de $E$, fait correspondre le réel $g(f(x))$ est appelée **fonction composée** de $f$ suivie de $g$. On a ainsi

$$\begin{array}{rcl} E \longrightarrow & F & \longrightarrow G \\ x \longmapsto & f(x) & \longmapsto g(f(x)) \end{array}$$

Cette fonction est notée $g \circ f$.

**Exemple 1.26**
Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \right.$ et $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-1 \end{array} \right.$. Déterminer $f \circ g$ et $g \circ f$.

**Solution**
On a, pour tout réel $x$,

$$g \circ f(x) = x^2 - 1 \text{ et } f \circ g(x) = (x-1)^2$$

**Remarque**
Dans le résultat précédent, on remarque que $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composée n'est pas **commutative**.

***Méthode***
Pour déterminer la composée de deux fonctions, on étudiera d'abord les domaines de définition pour déterminer le domaine de définition de la fonction composée.

**Exemple 1.27**
Soit $f : x \longmapsto x^2 - 1$ et $g : x \longmapsto \sqrt{x}$. Déterminer $g \circ f$.

**Solution**
$g \circ f(x)$ n'est définie que si $f(x) \geqslant 0$ (car $g$ est la fonction racine, définie sur $\mathbb{R}^+$). Or

$$f(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$$

Ainsi, $g \circ f$ est définie sur $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ par $g \circ f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

**Proposition 1.5. associativité**

Si $f : E \to F,\ g : F \to G,\ h : G \to H$ sont trois fonctions, alors

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$$

## 4.3. Injection, surjection

### 4.3.1. Injection

**Définition 1.18.**

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **injective** si $f$ ne prend jamais deux fois la même valeur :

$$\forall (x, x') \in E^2, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

**Remarque**

On dispose également de la formulation équivalente suivante (il s'agit de la contraposée de la précédente) :

$$\forall (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

***Méthode***

Pour montrer qu'une fonction est injective, on prend deux éléments $x$ et $x'$ de $E$ vérifiant $f(x) = f(x')$. On montre alors que nécessairement $x = x'$.

**Exemple 1.28**

Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x+1}$ est injective.

**Solution**

En effet, soient $x, x' \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(x) = f(x')$. On a donc $e^{x+1} = e^{x'+1}$, c'est-à-dire $x + 1 = x' + 1$ en composant par la fonction logarithme népérien. On a donc bien $x = x'$.

**Remarque**

$f : E \to F$ n'est pas injective si et seulement si

$$\exists\ (x, x') \in E^2, f(x) = f(x') \text{ et } x \neq x'$$

***Méthode***

Pour montrer qu'une fonction n'est pas injective, on cherche un contre-exemple.

**Exemple 1.29**

Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.

**Solution**

En effet, $1 \neq -1$ et pourtant $1^2 = (-1)^2 = 1$.

**Théorème 1.6.**

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications injectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi injective.

**Démonstration**

Soient $x$ et $x'$ deux éléments de $E$ tels que $g \circ f(x) = g \circ f(x')$. Alors, puisque $g(f(x)) = g(f(x'))$, et comme $g$ est injective, on a nécessairement $f(x) = f(x')$. Or, $f$ est aussi injective : on a donc $x = x'$. $g \circ f$ est bien injective.

### 4.3.2. Surjection

**Définition 1.19.**

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **surjective** si tout élément de $F$ possède au moins un antécédent par $f$ dans $E$ :

$$\forall\ y \in F, \exists\ x \in E, y = f(x)$$

***Méthode***

Pour prouver qu'une fonction $f$ est surjective, il suffit donc de trouver une solution $x$ à l'équation $f(x) = y$ pour tout élément $y$ de $F$.

**Exemple 1.30**

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout $x$ par $f(x) = 2x - 1$ est surjective.

**Solution**

En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $y = f(x) \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$. Il existe donc au moins un antécédent à $y$ par la fonction $f$.

***Méthode***

Pour montrer qu'une fonction n'est pas surjective, on exhibe une valeur qui ne peut être atteinte par la fonction.

**Exemple 1.31**

Montrer que la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie pour tout réel $x$ par $f(x) = e^x$ n'est pas surjective.

**Solution**

Puisque, pour tout réel $x$, $e^x > 0$, la valeur $0$ n'est jamais atteinte par $f$. Ainsi, $f$ n'est pas surjective.

**Remarque**

On constate cependant que la fonction précédente est surjective sur $\mathbb{R}_+^*$.

**Théorème 1.7.**

Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications surjectives, alors $g \circ f : E \to G$ est aussi …

surjective.

**Démonstration**
Soit $z$ un élément de $G$. Puisque $g$ est surjective, il existe un élément $y \in F$ tel que $g(y) = z$. De plus, $f$ est surjective, donc il existe un élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$. Mais alors

$$g(f(x)) = g(y) = z$$

Donc $x$ est un antécédent de $z$ par la fonction $g \circ f$.

#### 4.3.3. Bijection

**Définition 1.20.**

On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective. Ainsi, $f$ est bijective si, et seulement si, chaque élément de $F$ possède un **unique antécédent** par $f$ dans $E$ :

$$\forall\ y \in F, \exists!\ x \in E, y = f(x)$$

***Méthode***
Pour démontrer qu'une fonction $f : E \to F$ est bijective, il faut montrer que, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède une **unique** solution dans $E$.

**Exemple 1.32**
Montrer que la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 4$ est bijective.

**Solution**
En effet, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = y \Leftrightarrow x - 4 = y \Leftrightarrow x = y + 4$$

Il existe donc bien un unique antécédent à $y$ par $f$.

**Exemple 1.33**
L'application $Id_E : E \to E$ définie pour tout $x$ de $E$ par $Id_E(x) = x$ est une bijection de $E$ dans $E$.

**Théorème 1.8.**

Soit $f : E \to F$ une fonction. $f$ est bijective si, et seulement si, il existe une unique fonction $g : F \to E$, telle que $f \circ g = Id_F$ et $g \circ f = Id_E$.
La fonction $g$ est appelée **fonction réciproque** de $f$, et est notée $g = f^{-1}$.

**Exemple 1.34**
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto 2x - 1$. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g : x \mapsto \frac{x+1}{2}$. Montrer que $f$ et $g$ sont bijectives, et réciproques l'une de l'autre.

**Solution**

On constate que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f \circ g(x) = 2\frac{x+1}{2} - 1 = x \text{ et } g \circ f(x) = \frac{(2x-1)+1}{2} = x$$

Ainsi, $f$ est bijective, et sa bijection réciproque est la fonction $g$.

***Méthode***

Pour déterminer la fonction réciproque d'une fonction $f$, on résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x$. On obtiendra $x = g(y)$ et $g$ représente alors la fonction réciproque.

**Exemple 1.35**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie pour tout réel $x$ par $f(x) = e^{x+1}$. Déterminer $f^{-1}$.

**Solution**

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$. Alors

$$f(x) = y \Leftrightarrow e^{x+1} = y \Leftrightarrow x = \ln(y) - 1$$

qui a un sens car $y > 0$. Ainsi $x = g(y)$ avec $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout réel $x > 0$ par $g(x) = \ln(x) - 1$. Donc $f^{-1} = g$.

***Méthode***

Lorsqu'on donne $f$ et $g$ et qu'on demande de montrer que $g = f^{-1}$, il suffit de montrer que $f \circ g = Id$ et $g \circ f = Id$.

**Exemple 1.36**

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 4x - 2$. Montrer que $f^{-1}$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f^{-1}(y) = \frac{y+2}{4}$.

**Solution**

Notons $g : y \mapsto \frac{y+2}{4}$. Alors, pour tous réels $x$ et $y$, on a

$$f \circ g(y) = f\left(\frac{y+2}{4}\right) = 4\left(\frac{y+2}{4}\right) - 2 = y$$

$$g \circ f(x) = g(4x-2) = \frac{(4x-2)+2}{4} = x$$

Ainsi, on a bien $f \circ g = Id_{\mathbb{R}}$ et $g \circ f = Id_{\mathbb{R}}$ : $g = f^{-1}$.

**Théorème 1.9.**

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux fonctions bijectives. Alors $g \circ f : E \to G$ est bijective, et on a

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

**Démonstration**
En effet,

$$(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ g^{-1}\circ g\circ f=f^{-1}\circ Id_F\circ f=f^{-1}\circ f=Id_E$$

et

$$(g\circ f)\circ(f^{-1}\circ g^{-1})=g\circ f\circ f^{-1}\circ g^{-1}=g\circ Id_F\circ g^{-1}=g\circ g^{-1}=Id_G$$

D'après le théorème précédent, $g\circ f$ est bijective, d'application réciproque $f^{-1}\circ g^{-1}$.

## 4.4. Image directe, image réciproque

**Définition 1.21.**

Soit $f:E\to F$ une fonction.

- Si $A\subset E$, on appelle **image directe** de $A$ par $f$, et on note $f(A)$, l'ensemble composé par les images par $f$ des éléments de $A$ :
$$f(A)=\left\{y\in F,\ \exists x\in E, f(x)=y\right\}$$
- Si $B\subset F$, on appelle **image réciproque** de $B$ par $f$, et on note $f^{-1}(B)$, l'ensemble composé par les antécédents par $f$ des éléments de $B$ :
$$f^{-1}(B)=\left\{x\in E,\ f(x)\in B\right\}$$

**Exemple 1.37**
Soit $f:x\mapsto x+2$. Déterminer $f([0;1])$ et $f^{-1}([0;1])$.

**Solution**
On a :

$$f([0;1])=[2;3]\quad \text{et}\quad f^{-1}(([0;1])=[-2;-1]$$

**Attention**
On ne confondra pas l'image réciproque d'un ensemble $f^{-1}(B)$ et l'application réciproque d'une application $f^{-1}$ lorsque celle-ci existe.

**Proposition 1.10.**

Soit $f:E\to F$ une application. $f$ est surjective si et seulement si $f(E)=F$.

**Démonstration**
Si $f$ est surjective, tout élément de $F$ admet au moins un antécédent dans $E$. Donc $f(E)=F$. Réciproquement, si $f(E)=F$, alors pour tout élément $y\in F$, il existe un $x\in E$ tel que $f(x)=y$ : par définition, $f$ est surjective.

# Exercices

## Raisonnement et vocabulaire ensembliste

## Exercices

### Récurrences

●○○ Exercice 1 Récurrences (40 min.)

Démontrer par récurrence les résultats suivants :

1. $\forall\ n \geqslant 1, \quad 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
2. Si $a$ est un réel fixé $a \geqslant -1$,
$$\forall\ n, \quad (1+a)^n \geqslant 1+na \qquad \text{(inégalité de Bernoulli)}$$
3. Si $u$ est la suite définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier $n$, $u_{n+1} = 2u_n - 3$, alors
$$\forall\ n, \quad u_n = 2^{n+2}+3$$
4. Si $q \neq 1$, alors
$$\forall\ n, \quad 1+q+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$
5. $\forall\ n \geqslant 1, \quad 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

### Ensemble

●○○ Exercice 2 Ensembles (5 min.)

Soient les ensembles suivants :

$$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}, \quad B = \{1,3,5,7\}, \quad C = \{2,4,6\}, \quad \text{et} \quad D = \{3,6\}$$

Déterminer $B\cap D, C\cap D, B\cup C, B\cup D$. Déterminer les complémentaires dans $A$ de $B, C$ et $D$.

●●○ Exercice 3 Lois de de Morgan et distributivités (10 min.)

Soient $E$ un ensemble, et $A, B$ et $C$ des sous-ensembles de $E$. Montrer par double inclusion les résultats suivants :

- $\overline{A\cup B} = \overline{A}\cap\overline{B}$
- $\overline{A\cap B} = \overline{A}\cup\overline{B}$
- $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

●○○ Exercice 4 Ensemble des parties (5 min.)

Déterminer les éléments de $\mathscr{P}(\{0,1,2\})$

### Fonctions

●○○ Exercice 5 Composées (10 min.)

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^2, g : x \mapsto \sqrt{x}$ et $h : x \mapsto x-2$. Déterminer l'ensemble de définition et l'expression des fonctions suivantes :

$$f\circ g, f\circ h, g\circ h, h\circ f, h\circ g, g\circ f$$

●○○ Exercice 6 Composées (5 min.)

Soit $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ et $g : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$. Déterminer quatre fonctions $u$, $v$, $w$, et $z$ telles que $f = u\circ v$ et $g = w\circ z$.

●●○ Exercice 7 Injectivité, surjectivité, bijectivité (15 min.)

Déterminer si les fonctions suivantes sont injectives, surjectives, bijectives.

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2+1$.
- $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie pour tout $x > 0$ par $g(x) = \mathrm{e}^{3+\ln(x)}$
- $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $h(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$

●○○ Exercice 8 Image directe, image réciproque (5 min.)

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{x+1}$.
Déterminer l'image directe par $f$ de $[0;1]$. Déterminer l'image réciproque par $f$ de $\mathbb{R}^+$ et de $[1;\mathrm{e}]$.