Chapitre 2

Utilisation des symboles Σ et Π

Le but de ce (petit) chapitre est d'introduire les symboles Σ et Π que l'on utilisera régulièrement au cours de l'année.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

1. maitriser les symboles Σ et $\prod$:
   - le changement de variable dans une somme . . . . ☐
   - la simplification d'une somme télescopique . . . . ☐

1. Définitions et propriétés

1.1. Définition

Définition 2.1.

Soient n et p deux entiers tels que $p < n$. On note $[\![p;n]\!] = \{p; p+1; \cdots; n\}$.

Remarque

Il y a n entiers dans $[\![1;n]\!]$, et $n+1$ entiers dans $[\![0;n]\!]$. Il y a $n-p+1$ entiers dans $[\![p;n]\!]$.

Exemple 2.1

Il y a 7 entiers dans $[\![2;8]\!]$.

Définition 2.2.

- Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels. On note
$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots a_n$$
et on lit "somme de $k=0$ à n des a_k".
- Soient $a_p, \cdots, a_n$ des réels ($p \leqslant n$). On note
$$\sum_{k=p}^{n} a_k = a_p + \cdots + a_n$$
et on lit "somme de $k=p$ à n des a_k".

Exemple 2.2

Par exemple, $\ln(2)+\ln(3)+\cdots+\ln(n) = \sum_{k=2}^{n} \ln(k)$.

Remarque

L'ordre de la sommation n'a pas d'importance. Ainsi $\sum_{k=1}^{n} k^2$ représente la même somme que $\sum_{k=n}^{1} k^2$.

Remarque

On définit de la même manière $a_p \times a_{p+1} \times \cdots \times a_n = \prod_{k=p}^{n} a_k$.

Définition 2.3.

Soit n un entier non nul. On appelle **factorielle** de n, et on note $n!$, le nombre $n! = \prod_{k=1}^{n} k$.

Par convention, $0! = 1$.

Remarque
On a ainsi $1! = 1$, $2! = 1 \times 2 = 2$ et $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$.

Proposition 2.1.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
$$(n+1)! = (n+1) \times n!$$

Démonstration
En effet, par définition,
$$(n+1)! = \underbrace{1 \times 2 \times \cdots \times n}_{=n!} \times (n+1) = n! \times (n+1)$$

1.2. Première propriétés

Soient deux entiers p et n tels que $p \leqslant n$, soient $a_p, \cdots, a_n, b_p, \cdots, b_n$ des réels.

- Linéarité :
$$\sum_{k=p}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=p}^{n} b_k$$
$$\forall\ \lambda \in \mathbb{R},\ \sum_{k=p}^{n} \lambda . a_k = \lambda \sum_{k=p}^{n} a_k$$
- Relation de Chasles : pour tout entier $m > n$,
$$\sum_{k=p}^{m} a_k = \sum_{k=p}^{n} a_k + \sum_{k=n+1}^{m} a_k$$
- $\displaystyle\prod_{k=p}^{n} (a_k \times b_k) = \prod_{k=p}^{n} a_k \times \prod_{k=p}^{n} b_k$
- $\forall\ \lambda,\ \displaystyle\prod_{k=p}^{n} (\lambda a_k) = \lambda^{n-p+1} \prod_{k=p}^{n} a_k$

1.3. ln et exp

Propriété 2.2.

- Pour tous réels $a_p, \cdots, a_n$, on a
$$\exp\left(\sum_{k=p}^{n} a_k\right) = \prod_{k=p}^{n} e^{a_k}$$
- Pour tous réels $a_p > 0, \cdots, a_n > 0$, on a
$$\ln\left(\prod_{k=p}^{n} a_k\right) = \sum_{k=p}^{n} \ln(a_k)$$

1.4. Sommes usuelles

Proposition 2.3.

On dispose des résultats suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} (\text{si } q \neq 1)$$

Démonstration

Elles ont été vues dans le chapitre précédent.

2. Changement de variables

2.1. Variables muettes

Remarque

Lorsqu'on écrit $\sum_{k=p}^{n} a_k$, la variable k est appelée **variable muette** : on peut la remplacer par n'importe quelle autre lettre non utilisée :

$$\sum_{k=p}^{n} a_k = \sum_{i=p}^{n} a_i = \sum_{z=p}^{n} a_z$$

2.2. Changement de variable

Puisque la variable d'une somme est muette, on peut faire un changement de variable, qui consiste à ré-écrire la somme différemment.

Proposition 2.4.

Soient $p \leqslant n$ deux entiers, l un entier, et $a_{p+l}, \cdots a_{n+l}$ des réels. Alors

$$\sum_{k=p+l}^{n+l} a_k = \sum_{j=p}^{n} a_{j+l}$$

On a effectué le changement de variable $j = k - l$: ainsi, si $k = p + l$, alors $j = p$. De même, $k = n + l$ amène $j = n$.

Méthode

Pour faire un changement de variable $j = f(k)$, on procède en remplaçant toutes les occurrences de k par son expression en fonction de j, mais on n'oublie pas de changer les bornes en conséquence !

Exemple 2.3
Calculer $S=\sum_{k=0}^{n}(n-k)$ en posant $j=n-k$.

Solution
Posons $j=n-k$. Alors

$$S=\sum_{j=n}^{0} j=\sum_{j=0}^{n} j$$

car l'ordre de la somme des termes n'importe pas. On a donc

$$S=\frac{n(n+1)}{2}$$

2.3. Sommes doubles

Remarque
On peut envisager de calculer des sommes de sommes. Dans ce cas, on fera attention à utiliser deux variables différentes.

Exemple 2.4
La somme suivante est une somme double :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\,j$$

Remarque
On peut calculer la somme précédente. En effet, lorsqu'on somme sur j, la variable i est une variable indépendante. Ainsi

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i\,j=\sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j=\frac{n(n+1)}{2}\frac{n(n+1)}{2}=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

Dans certains cas, on ne peut pas séparer les variables, quand une somme dépend d'une des variables. Par exemple,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j$$

Dans ce cas, on peut calculer la somme, mais en étant rigoureux :

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j=\sum_{i=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} j^2+j=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

3. Sommes télescopiques

3.1. Définition

Définition 2.4.

Soient $a_0, \cdots, a_{n+1}$ des réels. On appelle **somme télescopique** une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$$

Exemple 2.5

La somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ est une somme télescopique.

3.2. Simplification

Proposition 2.5.

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_{k+1} - a_k$. Alors

$$S_n = a_{n+1} - a_0$$

Démonstration

En effet,

$$S_n = (a_1 - a_0) + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) + (a_{n+1} - a_n) = -a_0 + a_{n+1}$$

Exemple 2.6

La somme $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$ se simplifie en

$$S_n = \frac{1}{n+1} - 1$$

Exercice 2.7

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$. Simplifier S_n.

Solution

On constate en effet, en utilisant les propriétés du logarithme, que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(k+1) - \ln(k)$$

La somme S_n est donc télescopique. On a donc

$$S_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1)$$

3.3. Produits télescopiques

On peut définir également les produits télescopiques, avec un résultat assez similaire à celui des sommes télescopiques.

Définition 2.5.

Soient $a_0, \cdots a_{n+1}$ des réels tous non nuls. On appelle **produit télescopique** un produit de la forme

$$\prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Exemple 2.8

Le produit

$$\frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \prod_{k=1}^{n+1} \frac{k+1}{k}$$

est un produit télescopique.

Proposition 2.6.

Soit $P_n = \prod_{k=0}^{n} \frac{a_{k+1}}{a_k}$ avec $a_0, \cdots a_{n+1}$ tous non nuls. Alors $P_n = \frac{a_{n+1}}{a_0}$