7

Chapitre

Convergence d'une suite

Nous allons généraliser la notion de limite, qui a été vue en classe de Terminale. Nous introduirons des méthodes pour déterminer les limites et des théorèmes permettant de montrer l'existence de limites.

Objectifs

La liste ci-dessous représente les éléments à maitriser absolument. Pour cela, il faut savoir refaire les exemples et exercices du cours, ainsi que ceux de la feuille de TD.

① Connaître la définition mathématique des limites . . . . ☐

② Savoir déterminer des limites en utilisant les théorèmes (somme, produit, quotient) . . . . ☐

③ Savoir utiliser le théorème d'encadrement et les théorèmes de comparaison . . . . ☐

④ Connaître les croissances comparées . . . . ☐

⑤ Savoir reconnaître les suites adjacentes . . . . ☐

⑥ Savoir démontrer qu'un suite est négligeable devant une autre . . . . ☐

⑦ Savoir démontrer que deux suites sont équivalents . . . . ☐

1. Généralités

1.1. Limite finie

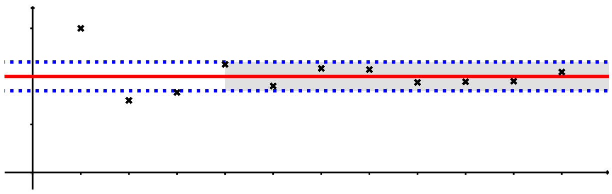
Définition 7.1.

Soit (u_n) une suite et ℓ un nombre réel. Si tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** ℓ, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite ℓ si et seulement si

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\quad n \geqslant n_0 \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon$$



Exemple 7.1

La suite u définie pour tout n par $u_n = \frac{1}{n+1}$ converge vers 0 :

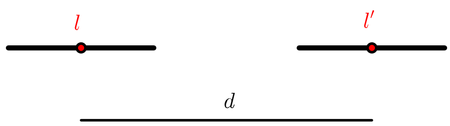
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Propriété 7.1.

Si une suite (u_n) a une limite finie, celle-ci est **unique**.

Démonstration

On suppose que (u_n) converge vers ℓ et ℓ' et que $\ell \neq \ell'$. Donc la distance entre ℓ et ℓ' est non nulle. On la note d, et on s'intéresse aux deux intervalles $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$ et $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$. Par définition de la convergence, tous les termes de la suite sont dans ces deux intervalles à partir d'un certain rang. Or :



les deux intervalles sont disjoints, ce qui est absurde.

1.2. Limite infinie

Définition 7.2.

Soit (u_n) une suite.

- Si tout intervalle de la forme $]a; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $+\infty$, et on note

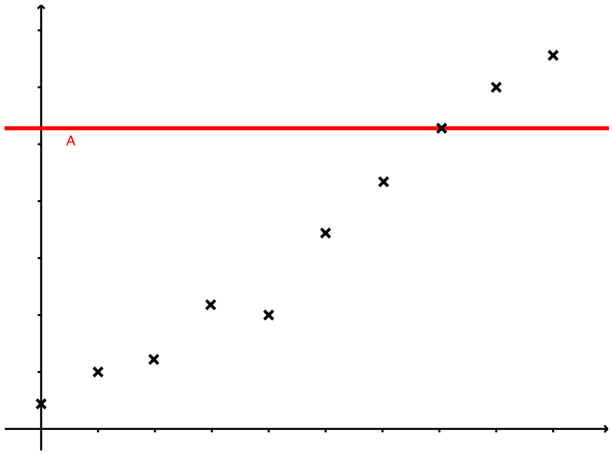
$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

- Si tout intervalle de la forme $]-\infty, a[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, on dit que la suite (u_n) **a pour limite** $-\infty$, et on note

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Mathématiquement, (u_n) a pour limite $+\infty$ si et seulement si

$$\forall\ A \in \mathbb{R},\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N},\ \forall\ n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow u_n > A$$



Exemple 7.2
La suite u définie pour tout n par $u_n = n$ a pour limite $+\infty$, et la suite v définie pour tout n par $v_n = -n^2$ a pour limite $-\infty$:

$$\lim_{n\to+\infty} n = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} -n^2 = -\infty$$

Algorithme 7.2.

Si une suite **croissante** (u_n) a pour limite $+\infty$, on peut utiliser l'algorithme suivant pour déterminer le plus petit entier n vérifiant $u_n > A$ (où A est un réel positif quelconque) :

Algorithme 1 : SEUIL

Entrées : Saisir A (nombre positif)
Initialisation :
$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow u_0$
Tant que $U \leqslant A$
  $n \leftarrow n+1$
  $U \leftarrow u_n$
FinTantque
Sorties : Afficher n

En Scilab, pour la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall\ n,\ u_{n+1} = 1 + u_n^2 \end{cases}$$

on obtient :

Scilab 7.3. Seuil pour une suite croissante

```
// Auteur : Crouzet
// Date : 21/06/2015
// Résumé : programme déterminant le premier entier n tel que
// un > a, où a est un réel donné et u une suite de limite +oo

n=0;
u=1;
// Valeur de seuil
seuil=100;

while(u<=seuil)
  // On n'a pas dépassé le seuil.
  // On passe au rang suivant
  n=n+1;
  // On calcule le terme suivant de la suite
  u=1+u^2;
end

// Ainsi, n contient le premier rang à partir duquel u_n > seuil
```

1.3. Suite convergente

Définition 7.3.

On dit qu'une suite est **convergente** si elle possède une limite finie. On dit qu'elle est **divergente** si elle possède une limite infinie.

1.4. Suite sans limite

Remarque

Certaines suites ne possèdent aucune limite, que ce soit finie ou infinie.

Exemple 7.3

La suite $((-1)^n)$ prend la valeur 1 aux termes pairs, et -1 aux termes impairs. Elle ne peut donc ni converger, ni diverger : elle ne possède donc pas de limite.

2. Théorèmes sur les limites

2.1. Théorème de comparaison

Théorème 7.4.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites convergentes, de limites respectives ℓ et ℓ'. Si, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $u_n \leqslant v_n$, alors $\ell \leqslant \ell'$.

Démonstration

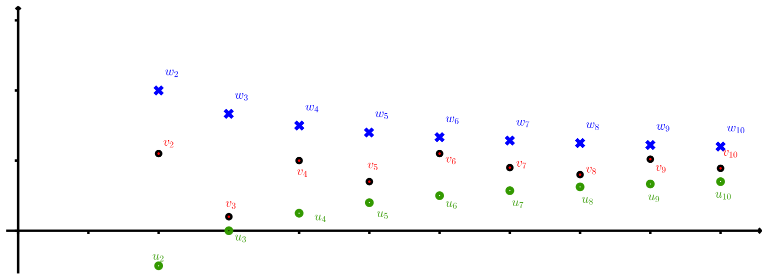
Supposons au contraire que $\ell > \ell'$. En notant d la distance (non nulle) entre ℓ et ℓ', cela signifie qu'à partir d'un certain rang, les termes de la suite (u_n) se trouve dans l'intervalle $]\ell - \frac{d}{4}; \ell + \frac{d}{4}[$. Or, $v_n \geqslant u_n$, donc, à partir d'un certain rang $v_n \geqslant \ell - \frac{d}{4}$. Donc l'intervalle $]\ell' - \frac{d}{4}; \ell' + \frac{d}{4}[$ ne contient aucun élément de la suite (v_n) à partir d'un certain rang : absurde.

2.2. Théorème d'encadrement

Théorème 7.5. Théorème d'encadrement

Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites. On suppose que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell$. Alors, (v_n) converge et

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$$



Remarque

Ce théorème est également appelé théorème des gendarmes.

Démonstration

Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ.
Par définition de la limite, il existe un rang n_1 tel que pour $n \geqslant n_1$, u_n soit dans I. De même, il existe un rang n_2 tel que, pour $n \geqslant n_2$, w_n soit dans I.
Mais alors, pour tout n plus grand que n_1 **et** n_2, $u_n \in I$ et $w_n \in I$. Or, $u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$, et puisque I est un intervalle, on en déduit que pour tout n plus grand que n_1 et n_2, $v_n \in I$.
Ceci étant vrai pour tout intervalle ouvert I contenant ℓ, on en déduit bien que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite où $(-1)^n$ apparait, on appliquera (quasi) systématiquement le théorème d'encadrement.

Exemple 7.4

Déterminer la limite de la suite (u_n) définie pour tout $n > 0$ par

$$u_n = \frac{(-1)^n + 2}{n}$$

Solution

Pour tout $n \neq 0$, on a $-1 \leqslant (-1)^n \leqslant 1$, donc $1 \leqslant (-1)^n + 2 \leqslant 3$ et puisque $n > 0$, on a

$$\frac{1}{n} \leqslant \frac{(-1)^n + 2}{n} \leqslant \frac{3}{n}$$

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0$. Par le théorème d'encadrement, la limite de (u_n) existe et

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n + 2}{n} = 0$$

Théorème 7.6.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites, et ℓ un réel. On suppose que pour tout $n \geqslant n_0$, $|u_n - \ell| \leqslant v_n$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$$

Démonstration

Application du théorème d'encadrement.

Exemple 7.5

On constate que, pour tout $n \geqslant 0$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Ainsi, d'après le théorème précédent, la suite $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge et a pour limite 0.

Théorème 7.7. Théorème de comparaison

Soient (u_n) et (v_n) deux suites.

- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
- Si pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

Démonstration

Démontrons le premier point. Soit A un réel strictement positif quelconque. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, il existe un rang n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on a $v_n \in [a;+\infty[$. Or, puisque pour tout n, $u_n \geqslant v_n$, on a également $u_n \in [a;+\infty[$ pour $n \geqslant n_0$.
Par définition de la limite infinie, cela signifie donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

2.3. Convergence des suites monotones

Théorème 7.8. Théorème de la limite monotone

Toute suite croissante majorée converge. Toute suite décroissante minorée converge.

Démonstration

Théorème admis.

Théorème 7.9.

Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

Démonstration

Soit (u_n) une suite croissante non majorée. La suite étant non majorée, quel que soit le réel a, on peut trouver un terme u_N de la suite strictement supérieur à a. On a donc $u_N > a$. Or, la suite u étant croissante, on a, pour tout $n \geqslant N$, $u_n \geqslant u_N > a$. Tous les termes de la suite u sont donc dans l'intervalle $]a;+\infty[$ a partir d'un certain rang. Ceci étant vrai pour tout a, par définition, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 7.6
La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante, non majorée : sa limite est $+\infty$.
La suite v définie pour tout $n > 0$ par $v_n = 1-\frac{1}{n}$ est croissante, majorée (par 1) : elle converge donc.

Théorème 7.10.
Soit (u_n) une suite **croissante** de limite ℓ. Alors, pour tout entier n, on a $u_n \leqslant \ell$

Démonstration
Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$. Notons $r = u_{n_0} - \ell > 0$. Par croissance de la suite u, on a donc, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$. Mais alors, l'intervalle $]\ell - r;\ell + r[$ ne contient aucun terme de la suite à partir de n_0. Cela contredit le fait que la suite u converge vers ℓ : ceci est absurde.

3. Opération sur les limites

3.1. Limites usuelles

Théorème 7.11.
On dispose des limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} |n| = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \ln(n) = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} n^\alpha = +\infty \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}_-^*) \qquad \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty$$

3.2. Limite de $u_n + v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
ℓ'	$\ell+\ell'$	$+\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND
$-\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$

Exercice 7.7
Déterminer la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n}$.

Solution
En effet, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$. Par somme, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 + \sqrt{n} = +\infty$.

3.3. Limite de $u_n \times v_n$

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\ell.\ell'$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	signe$(\ell).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$-\infty$	-signe$(\ell).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Remarque
On retiendra qu'on applique la règle des signes pour déterminer le signe du résultat.

Exercice 7.8
Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n$.

Solution
En effet, $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^n = +\infty$. Par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\mathrm{e}^n = +\infty$.

3.4. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) n'est pas nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\ell' \neq 0$	$\frac{\ell}{\ell'}$	signe$(\ell').\infty$	-signe$(\ell').\infty$
$+\infty$	0	IND	IND
$-\infty$	0	IND	IND

Exercice 7.9
Déterminer la limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1}$.

Solution
Par somme, on a les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty} 2-\frac{1}{n} = 2 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n}-1 = -1$$

Par quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}-1} = -2$$

3.5. Limite de $\frac{u_n}{v_n}$ si la limite de (v_n) est nulle

$\lim v_n \backslash \lim u_n$	0	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$
0^+	IND	signe$(l).\infty$	$+\infty$	$-\infty$
0^-	IND	-signe$(l).\infty$	$-\infty$	$+\infty$

3.6. Limite de (q^n)

Théorème 7.12.

Soit q un nombre réel. On s'intéresse à la suite (q^n).

- Si $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=+\infty$.
- Si $-1<q<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=0$.
- Si $q=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1^n=1$.
- Si $q\leqslant -1$, la suite (q^n) ne possède pas de limite.

Démonstration

Tout part de l'inégalité de Bernoulli, qui se démontre à l'aide d'une récurrence : pour tout $x>0$, et pour tout entier n, on a

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx$$

- Si $q>1$, on peut écrire $q=1+x$ avec $x=q-1>0$. D'après l'inégalité de Bernoulli

  $$q^n\geqslant 1+nx=1+n(q-1)$$

  Or, puisque $q-1>0$, on a

  $$\lim_{n\to+\infty} 1+n(q-1)=+\infty$$

  Par théorème d'encadrement,

  $$\lim_{n\to+\infty} q^n=+\infty$$

- Si $q=1$, la suite (q^n) est la suite constante égale à 1. Elle converge donc vers 1.
- Si $-1<q<1$, posons $Q=\frac{1}{|q|}>1$. Alors, d'après ce qui précède

  $$\lim_{n\to+\infty} Q^n=+\infty$$

  Or, on a

  $$0\leqslant |q|^n=\left(\frac{1}{Q}\right)^n=\frac{1}{Q^n}$$

  Par théorème d'encadrement, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} Q^n=+\infty$ on a

  $$\lim_{n\to+\infty} |q|^n=0 \text{ et donc } \lim_{n\to+\infty} q^n=0$$

- Si $q=-1$, la suite $(-1)^n$ vaut 1 pour les termes pairs, et -1 pour les termes impairs. Elle ne peut donc converger.
- Si $q<-1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n=+\infty$. Donc la suite $(|q|^n)$ prend des valeurs aussi grandes que l'on veut. Or, la suite (q^n) prend des valeurs positives pour les termes pairs, et négatives pour les termes impairs. Elle ne peut donc pas avoir de limite.

Méthode

Pour déterminer la limite d'une suite composée de puissances, on met les plus grandes puissances en facteur, et on utilise le résultat précédent.

Exercice 7.10

Soit u la suite définie pour tout entier n par

$$u_n=\frac{3^n+4^n}{3\times 4^n+2^n}$$

Déterminer la limite de la suite u.

Solution

Pour tout entier n, on a

$$u_n = \frac{4^n\left(1+\frac{3^n}{4^n}\right)}{4^n\left(3+\frac{2^n}{4^n}\right)} = \frac{1+\left(\frac{3}{4}\right)^n}{3+\left(\frac{2}{4}\right)^n}$$

Puisque $-1 < \frac{3}{4} < 1$ et $-1 < \frac{2}{4} < 1$, on a

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{4}\right)^n = 0$$

Par somme et quotient, on en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{3}$$

3.7. Croissances comparées

Théorème 7.13.

Pour tous réels a et b strictement positifs :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^n}{n^a} = +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^a}{\ln^b(n)} = +\infty$$

et de manière générale, pour $q > 1$,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n^a} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{q^n} = +\infty$$

Remarque

On note souvent de la manière suivante (avec $q > 1$ et $a > 0$) :

$$\ln^b(n) << n^a << q^n << n!$$

On donnera une notation rigoureuse à la fin de ce chapitre.

Démonstration

Voir chapitre Limite de fonctions.

Exemple 7.11

On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)}{n} = 0$$

Exercice 7.12

Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n+\ln(n)}{n+1}$.

Solution

On constate que, pour tout $n>0$:

$$\frac{n+\ln(n)}{n+1}=\frac{n\left(1+\frac{\ln(n)}{n}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1+\frac{\ln(n)}{n}}{1+\frac{1}{n}}$$

Par croissances comparées, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(n)}{n}=0$. Par somme, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{\ln(n)}{n}=1$. On a également $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\dfrac{1}{n}=1$. Par quotient,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n+\ln(n)}{n+1}=1$$

4. Suites adjacentes

Définition 7.4.

On dit que deux suites (u_n) et (v_n) sont **adjacentes** si (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$.

Exemple 7.13

Les suites u et v définies pour tout $n\geqslant 1$ par $u_n=-\frac{1}{n}$ et $v_n=\frac{1}{n}$ sont adjacentes.

Théorème 7.14.

Si deux suites sont adjacentes, alors elles sont convergentes, et elles ont la même limite.

Démonstration

On montre que la définition des suites adjacentes entraîne que, pour tout n, $u_0\leqslant u_n\leqslant v_n\leqslant v_0$: en effet, la suite (v_n-u_n) est décroissante par construction, et de limite 0 : cela implique que tous les termes de la suite (v_n-u_n) sont positifs.
La suite (u_n) est donc croissante majorée : elle converge, vers une limite que l'on note ℓ. De même, la suite (v_n) est décroissante minorée : elle converge, vers ℓ'. Or, par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n-u_n=0$. Par opération sur les limites, cela implique $\ell-\ell'=0$, soit $\ell=\ell'$.

Méthode

Pour montrer que deux suites sont adjacentes, on montre qu'une est croissante, l'autre est décroissante et que la différence des deux tend vers 0.

Exercice 7.14

Soient u et v deux suites définies par

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\quad\text{et}\quad v_n=u_n+\frac{1}{n\times n!}$$

Montrer que u et v sont adjacentes.

Solution
Pour tout entier n, on a
$$u_{n+1}-u_n=\frac{1}{(n+1)!}>0$$
donc la suite (u_n) est croissante. De même
$$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}+\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\left(u_n+\frac{1}{nn!}\right)=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+1).(n+1)!}-\frac{1}{nn!}$$
Après mise au même dénominateur
$$v_{n+1}-v_n=\frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{n(n+1).(n+1)!}=\frac{-1}{n(n+1).(n+1)!}<0$$
donc la suite (v_n) est décroissante. Enfin $v_n-u_n=\frac{1}{n.n!}$ et
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n.n!}\quad\text{par quotient}$$
Bilan : les suites u et v sont bien adjacentes.

Remarque
Etant adjacentes, elles convergent, et ont la même limite. On peut montrer que leur limite commune est e.

5. Comparaison de suites

L'idée de cette section est d'introduire des méthodes de comparaison de suites, permettant de déduire certains résultats sur les limites.

5.1. Négligeabilité

Définition 7.5.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u est négligeable par rapport à v au voisinage de $+\infty$ si et seulement si
$$\frac{u_n}{v_n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$$
On note alors $u_n=o_{+\infty}(v_n)$, ou plus simplement $u_n=o(v_n)$, et on lit "u est un petit o de v au voisinage de $+\infty$".

Exemple 7.15
On a $n=o(n^2)$.

Solution
En effet, $\dfrac{n}{n^2}=\dfrac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$.

Propriété 7.15. Opérations sur la négligeabilité

Soient u, v et w trois suites non nulles à partir d'un certain rang.

① (Multiplication par un réel) Si $u_n=o(v_n)$ alors pour tout réel k, $ku_n=o(v_n)$.

…

② (Quotient) Si $u_n = o(v_n)$ alors $u_n w_n = o(v_n w_n)$ et $\dfrac{u_n}{w_n} = o\left(\dfrac{v_n}{w_n}\right)$.

③ (Transitivité) Si $u_n = o(v_n)$ et $v_n = o(w_n)$ alors $u_n = o(w_n)$.

④ (Somme) Si $u_n = o(v_n)$ et $w_n = o(v_n)$ alors $u_n + w_n = o(v_n)$.

Remarque
Attention : pour la somme, il faut que les suites soient négligeables par rapport à une même suite.

Exercice 7.16
Montrer que $\mathrm{e}^{-n} = o(n^4)$ et que $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Solution
Remarquons que
$$\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^4} = \frac{1}{\mathrm{e}^n n^4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{par quotient.}$$
Enfin, $\ln(n) = o(n^4)$ et $n^2 = o(n^4)$ (par croissances comparées). Par somme, $\ln(n) - 2n^2 = o(n^4)$.

Remarque
Une suite vérifiant $u = o(1)$ est une suite qui tend vers 0.

Proposition 7.16. Croissances comparées

On peut écrire les croissances comparées ainsi : si $\alpha > 0$ et $\beta > 0$:
$$n^\alpha = o(\mathrm{e}^n), \qquad (\ln n)^\alpha = o(n^\beta), \qquad \text{si } \alpha < \beta, \quad n^\alpha = o(n^\beta), \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^n = o(n!)$$
De manière générale, si $1 < q < p$:
$$n^\alpha = o(q^n), \quad q^n = o(p^n) \quad \text{et} \quad q^n = o(n!)$$

5.2. Équivalence

Définition 7.6.

Soient u et v deux suites, v ne s'annulant pas à partir d'un certain rang. On dit que u et v sont équivalentes au voisinage de $+\infty$ si
$$\frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$
On note $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, ou plus simplement $u_n \sim v_n$.

Exercice 7.17
Montrer que $n^2 + n \sim n^2$.

Solution

En effet, pour $n \geqslant 1$:

$$\frac{n^2+n}{n^2} = 1 + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

On dispose d'une autre définition : u et v sont équivalentes si et seulement si

$$u_n = v_n + o_{+\infty}(v_n)$$

En effet,

$$\frac{u_n - v_n}{v_n} = \frac{u_n}{v_n} - 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Conséquence 7.17.

Soient deux suites u et v équivalentes. Alors

- Si u converge vers ℓ, v converge également vers ℓ.
- Si u est de signe constant à partir d'un certain rang, v est également de signe constant et de même signe à partir d'un certain rang.

Propriété 7.18. Opérations sur les équivalents

Soient u, v, w et x quatre suites non nulles à partir d'un certain rang.

① (Compatibilité avec la multiplication) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $u_n w_n \sim v_n x_n$.

② (Compatibilité avec le quotient) Si $u_n \sim v_n$ et $w_n \sim x_n$, alors $\dfrac{u_n}{w_n} \sim \dfrac{v_n}{x_n}$.

③ (Compatibilité avec les puissances) Si les suites u et v sont strictement positives, et telles que $u_n \sim v_n$, alors pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$, $u_n^p \sim v_n^p$.

Démonstration

Les preuves se font en utilisant la définition. Par exemple, remarquons que

$$\frac{u_n w_n}{v_n x_n} = \frac{u_n}{v_n} \times \frac{w_n}{x_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$$

Remarque

⚠ Attention : en général, on ne peut ni ajouter, ni soustraire des équivalents.

Exercice 7.18

Déterminer

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4}$$

Solution

Puisque $\ln(n) = o(n^4)$, on a $\ln(n)+n^4 \sim n^4$. De même, $1-n^4 \sim -n^4$. Par quotient

$$\frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4} \sim \frac{n^4}{-n^4} = -1$$

et donc

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln(n)+n^4}{1-n^4} = -1$$

Proposition 7.19. Formule de Stirling

On dispose d'un équivalent de $n!$:

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

Remarque

On retrouve, grâce à ce résultat, que $q^n = o(n!)$.

Exercices

Convergence d'une suite

Exercices

Limites générales

●○○ Exercice 1 Limites (15 min.)

Déterminer les limites des suites suivantes (sans utiliser les équivalents ou négligeabilités).

1. $u_n = -n^3 + 3n^2 - 2n + 1$
2. $u_n = \dfrac{2n+1}{1-4n}$
3. $u_n = \dfrac{2n^2+1}{n-1}$
4. $u_n = \dfrac{(-1)^n + 4}{n^2}$
5. $u_n = \dfrac{2(-1)^{n^3+1}}{n+2}$
6. $u_n = 3n^3 + 4n^2 + 2n - 1$
7. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2-3n}$
8. $u_n = \dfrac{n^2+3n+1}{2n+1}$
9. $u_n = \dfrac{2^n + 4^n - 5^n}{3^n + 2 \times 5^n}$
10. $u_n = \dfrac{2 \times 3^n - 4^n}{7^n - 1}$

●○○ Exercice 2 Limites - le retour (15 min.)

Traiter les limites de l'exercice 1 en utilisant les négligeabilités et équivalences (sauf limites 4 et 5).

Suites et limites

●○○ Exercice 3 Exercice bilan I (15 min.)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$ et pour tout n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n}$$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$0 \leqslant u_n \leqslant 3$$
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout n par
$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$
   (a) Expliquer pourquoi la suite (v_n) est bien définie pour tout n.
   (b) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.
   (c) Exprimer v_n en fonction de n.
3. Exprimer u_n en fonction de n. En déduire la limite de (u_n).

●○○ Exercice 4 Exercice bilan II (15 min.)

On considère les suites u et v définies par $u_0 = 1$, $v_0 = 12$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3} \qquad \text{et} \qquad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. Soit (w_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $w_n = v_n - u_n$.
   (a) Démontrer que la suite (w_n) est géométrique. On précisera la raison et le premier terme.
   (b) Déterminer l'expression de w_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier n, $w_n > 0$
   (d) Déterminer la limite de la suite (w_n).
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante, et que la suite (v_n) est décroissante.
3. En déduire que les suites (u_n) est (v_n) sont adjacentes, et qu'elles ont la même limite que l'on notera l dans la suite du problème.
4. Soit t la suite définie pour tout entier naturel par $t_n = 3u_n + 8v_n$.
   (a) Montrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) Déterminer alors la valeur de l.

●○○ Exercice 5 Exercice bilan III (15 min.)

On définit deux suites (u_n) et (v_n) par $u_0 = 20$, $v_0 = 1$ et

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + 5v_n}{6}$$

1. Pour tout entier n, on pose $w_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que (w_n) est une suite géométrique, à termes positifs.
   (b) Déterminer la limite de (w_n), et exprimer w_n en fonction de n.
2. Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et que la suite (v_n) est croissante.
3. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.
4. Pour tout entier n, on pose $t_n = 5u_n + 24v_n$.
   (a) Démontrer que la suite (t_n) est constante.
   (b) En déduire l'expression de u_n et v_n en fonction de n, et déterminer la limite de (u_n) et (v_n).